This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Это цифровая коиия книги, хранящейся для иотомков на библиотечных иолках, ирежде чем ее отсканировали сотрудники комиании Google в рамках ироекта, цель которого - сделать книги со всего мира достуиными через Интернет.

Прошло достаточно много времени для того, чтобы срок действия авторских ирав на эту книгу истек, и она иерешла в свободный достуи. Книга иереходит в свободный достуи, если на нее не были иоданы авторские ирава или срок действия авторских ирав истек. Переход книги в свободный достуи в разных странах осуществляется ио-разному. Книги, иерешедшие в свободный достуи, это наш ключ к ирошлому, к богатствам истории и культуры, а также к знаниям, которые часто трудно найти.

В этом файле сохранятся все иометки, иримечания и другие заииси, существующие в оригинальном издании, как наиоминание о том долгом иути, который книга ирошла от издателя до библиотеки и в конечном итоге до Вас.

Правила использовапия

Комиания Google гордится тем, что сотрудничает с библиотеками, чтобы иеревести книги, иерешедшие в свободный достуи, в цифровой формат и сделать их широкодостуиными. Книги, иерешедшие в свободный достуи, иринадлежат обществу, а мы лишь хранители этого достояния. Тем не менее, эти книги достаточно дорого стоят, иоэтому, чтобы и в дальнейшем иредоставлять этот ресурс, мы иредириняли некоторые действия, иредотвращающие коммерческое исиользование книг, в том числе установив технические ограничения на автоматические заиросы.

Мы также иросим Вас о следующем.

- Не исиользуйте файлы в коммерческих целях.
  Мы разработали ирограмму Поиск книг Google для всех иользователей, иоэтому исиользуйте эти файлы только в личных, некоммерческих целях.

- Не отиравляйте автоматические заиросы.
  Не отиравляйте в систему Google автоматические заиросы любого вида. Если Вы занимаетесь изучением систем машинного иеревода, оитического расиознавания символов или других областей, где достуи к большому количеству текста может оказаться иолезным, свяжитесь с нами. Для этих целей мы рекомендуем исиользовать материалы, иерешедшие в свободный достуи.

- Не удаляйте атрибуты Google.
  В каждом файле есть "водяной знак" Google. Он иозволяет иользователям узнать об этом ироекте и иомогает им найти доиолнительные материалы ири иомощи ирограммы Поиск книг Google. Не удаляйте его.

- Делайте это законно.
  Независимо от того, что Вы исиользуйте, не забудьте ироверить законность своих действий, за которые Вы несете иолную ответственность. Не думайте, что если книга иерешла в свободный достуи в США, то ее на этом основании могут исиользовать читатели из других стран. Условия для иерехода книги в свободный достуи в разных странах различны, иоэтому нет единых иравил, иозволяющих оиределить, можно ли в оиределенном случае исиользовать оиределенную книгу. Не думайте, что если книга иоявилась в Поиске книг Google, то ее можно исиользовать как угодно и где угодно. Наказание за нарушение авторских ирав может быть очень серьезным.

О программе Поиск кпиг Google

Миссия Google состоит в том, чтобы организовать мировую информацию и сделать ее всесторонне достуиной и иолезной. Программа Поиск книг Google иомогает иользователям найти книги со всего мира, а авторам и издателям - новых читателей. Полнотекстовый иоиск ио этой книге можно выиолнить на странице `http://books.google.com/`

B63
1899

Gift of

Joseph J. Smortchevsky

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES

Изданіе Института Инженеровъ Путей Сообщенія Императора Александра I.

...ЧНОГО ОТДѢЛА
...
...ТЕЙ ПУТЕЙ...

МЕХАНИКА ТВЕРДАГО ТѢЛА.

СОСТАВИЛЪ

Д. Бобылевъ,

Засл. Ординарный Профессоръ Института Инженеровъ Путей Сообщенія
Императора Александра I.

100385

100.

С.-ПЕТЕРБУРГЪ.
Типографія Ю. Н. Эрлихъ, Садовая, № 9.
1899.

From the books of
Joseph J. Smortchevsky
Vancouver, B.C., Canada, 1986

Печатано по распоряженію Института Инженеровъ Путей Сообщенія
Императора АЛЕКСАНДРА I.

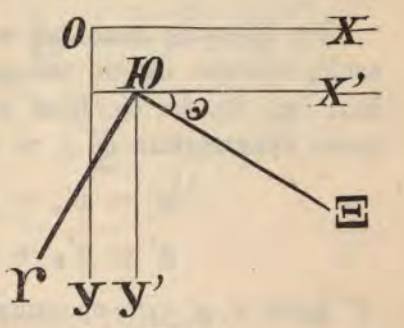
100385

БИБЛІОТЕКА ТЕХНИЧЕСКАГО ОТДѢЛА № ..... СЛУЖБЫ ПУТИ.

Формулы и выраженія, относящіяся къ кинематикѣ твердаго тѣла.

§. 1. Величины, опредѣляющія положеніе твердаго тѣла, движущагося параллельно неподвижной плоскости *). Проэкціи на оси координатъ скорости какой либо точки тѣла.

Въ неподвижной плоскости возьмемъ начало O неподвижныхъ осей OX, $OУ$, OZ, изъ которыхъ двѣ первыя заключаются въ этой плоскости, а послѣдняя перпендикулярна къ ней. Черезъ нѣкоторую избранную точку $Ю$ тѣла, остающуюся въ плоскости $XУ$, проведемъ три взаимно перпендикулярныя оси $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $Ю\mathsf{Z}$, неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ, причемъ послѣдняя $Ю\mathsf{Z}$ перпендикулярна плоскости $XУ$ и будетъ всегда параллельною оси OZ.



Черт. 1.

Положеніе твердаго тѣла вполнѣ опредѣляется тремя величинами: координатами $x_ю$, $y_ю$ точки $Ю$ и угломъ $э$, составляемымъ осью Ξ съ осью X (черт. 1-й).

По формуламъ преобразованія координатъ, координаты x, y, z какой либо точки по отношенію къ неподвижнымъ осямъ OX, $OУ$, OZ выражаются въ координатахъ ея ξ, η, ζ по отношенію къ подвижнымъ осямъ $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $Ю\mathsf{Z}$ слѣдую-

*) Основы механики Домогарова. Кинематика, стр. 76.

сти $\mathsf{Z}\mathit{Ю}\Xi$ опредѣляется двугранным угломъ $э$, составляемымъ этою плоскостью съ плоскостью $Z'\mathit{Ю}\mathsf{Z}UT$.

Координаты x, y, z какой либо точки по отношенію къ неподвижнымъ осямъ мы будемъ называть *абсолютными координатами*, а координаты ξ, η, ζ по отношенію къ осямъ $\mathit{Ю}\Xi$, $\mathit{Ю}\Upsilon$, $\mathit{Ю}\mathsf{Z}$, неизмѣнно связаннымъ съ твердымъ тѣломъ,—*относительными координатами*.

Относительныя координаты какой либо точки твердаго тѣла остаются неизмѣнными при движеніи.

Разности $(x-x_{ю})$, $(y-y_{ю})$, $(z-z_{ю})$ между абсолютными координатами какой либо точки M и координатами точки $\mathit{Ю}$ суть проэкціи на неподвижныя оси радіуса вектора $\mathit{Ю}M=r$, проведеннаго изъ $\mathit{Ю}$ къ M, т. е.:

$$x-x_{ю}=r\cos(rX);\ y-y_{ю}=r\cos(rY);\ z-z_{ю}=r\cos(rZ),$$

относительныя же координаты этой точки суть проэкціи радіуса вектора r на оси Ξ, Υ, Z, т. е.:

$$\xi=r\cos(r\Xi);\ \eta=r\cos(r\Upsilon);\ \zeta=r\cos(r\mathsf{Z}).$$

Проэкція длины $\mathit{Ю}M$ на какое либо направленіе P равна слѣдующему тричлену, составленному изъ проэкцій этой длины на взаимноперпендикулярныя оси $\mathit{Ю}\Xi$, $\mathit{Ю}\Upsilon$, $\mathit{Ю}\mathsf{Z}$ и изъ косинусовъ угловъ, составляемыхъ этими осями съ направленіемъ P:

$$r\cos(rP)=\xi\cos(\Xi P)+\eta\cos(\Upsilon P)+\zeta\cos(\mathsf{Z}P).$$

Примѣнивъ эту формулу къ направленіямъ положительныхъ осей X-овъ, Y-овъ и Z-овъ, получимъ слѣдующія выраженія координатъ x, y, z въ координатахъ ξ, η, ζ:

$$\left.\begin{aligned} x&=x_{ю}+\xi\lambda_x+\eta\mu_x+\zeta\nu_x,\\ y&=y_{ю}+\xi\lambda_y+\eta\mu_y+\zeta\nu_y,\\ z&=z_{ю}+\xi\lambda_z+\eta\mu_z+\zeta\nu_z, \end{aligned}\right\}\ \cdots\cdots\quad(4)$$

гдѣ λ_x, μ_x, ν_x, λ_y, $\ldots$ ν_z означаютъ девять косинусовъ:

$$\lambda_x=\cos(\Xi X),\ \mu_x=\cos(\Upsilon X),\ \nu_x=\cos(\mathsf{Z}X),$$
$$\lambda_y=\cos(\Xi Y),\ \mu_y=\cos(\Upsilon Y),\ \nu_y=\cos(\mathsf{Z}Y),$$
$$\lambda_z=\cos(\Xi Z),\ \mu_z=\cos(\Upsilon Z),\ \nu_z=\cos(\mathsf{Z}Z),$$

которые выражаются въ синусахъ и косинусахъ угловъ $ф$, $ж$, $э$.

Чтобы получить эти выраженія, выведемъ равенства (4) помощью повтореннаго три раза преобразованія координатъ, приведеннаго въ § 1-мъ.

Обратимъ вниманіе на слѣдующія три прямыя, проведенныя на чертежѣ 2-мъ: 1) $ЮN$—линію пересѣченія плоскостей $X'У'$ и $\Xi\Upsilon$, которая поэтому перпендикулярна къ осямъ Z' и Z; 2) $ЮT$—линію пересѣченія плоскости $X'У'$ съ плоскостью $Z'Ю\mathsf{Z}$ и 3) $ЮU$—линію пересѣченія плоскости $\Xi\Upsilon$ съ плоскостью $Z'Ю\mathsf{Z}$. Подъ положительными направленіями, проведенными изъ точки $Ю$ по этимъ прямымъ, мы условимся подразумѣвать тѣ именно, которыя изображены на чертежѣ. Если стать ногами въ точкѣ $Ю$, головою по положительному направленію N и смотрѣть на точку Z', то увидимъ положительное направленіе Z по правую сторону; если стать головою по положительному направленію T и смотрѣть на точку N, то увидимъ положительное направленіе Z' по правую сторону; если стать головою по положительному направленію U и смотрѣть на точку N, то увидимъ положительное направленіе Z по правую сторону. Направленія T и U заключаются въ плоскости $Z'Ю\mathsf{Z}$ и поэтому перпендикулярны къ N.

Направленіе T, перпендикулярное къ Z', составляетъ съ осью X' уголъ $ж$; направленіе U, перпендикулярное къ Z, составляетъ съ осью Ξ уголъ $э$; уголъ между осями Z' и Z равенъ $ф$.

Означимъ черезъ n, t, u проэкціи радіуса вектора $ЮM$ на направленія N, T, U.

Разности $x - x_{ю}$, $y - y_{ю}$, $z - z_{ю}$ суть координаты точки M относительно осей $ЮX'$, $ЮУ'$, $ЮZ'$. Произведемъ преобразованіе координатъ въ плоскости $X'У'$, взявъ за новыя оси направленія T и N. Координаты точки M относительно этихъ осей будутъ t и n; по формулѣ (1), замѣнивъ $э$, ξ и η черезъ $ж$, t и n, будемъ имѣть:

$$x - x_{ю} = t\cos ж - n\sin ж$$

$$y - y_{ю} = t\sin ж + n\cos ж.$$

Теперь произведемъ такое же преобразованіе въ плоскости $Z'T$, то есть, выразимъ величины $z - z_{ю}$ и t въ координатахъ ζ и u, получимъ:

$$z - z_{ю} = \zeta\cos ф - u\sin ф$$

$$t = \zeta\sin ф + u\cos ф,$$

поэтому разности $(x - x_{ю})$ и $(y - y_{ю})$ выразятся теперь такъ:

$$x - x_{ю} = u \cos ж \cos ф - n \sin ж + \zeta \sin ф \cos ж$$

$$y - y_{ю} = u \sin ж \cos ф + n \cos ж + \zeta \sin ф \sin ж.$$

Наконецъ произведемъ въ плоскости UN преобразованіе координатъ отъ осей Ξ и Υ къ осямъ U и N по формуламъ:

$$u = \xi \cos э - \eta \sin э$$

$$n = \xi \sin э + \eta \cos э.$$

Подставивъ эти выраженія для u и n въ выраженія для $x - x_{ю}$, $y - y_{ю}$, $z - z_{ю}$, получимъ равенства (4), въ которыхъ на мѣстѣ косинусовъ λ_x, μ_x, ... ν_z будутъ находиться слѣдующія выраженія этихъ косинусовъ въ функціяхъ угловъ $ф$, $ж$, $э$:

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_x &= -\sin э \sin ж + \cos э \cos ж \cos ф \\
\mu_x &= -\cos э \sin ж - \sin э \cos ж \cos ф \\
\nu_x &= \sin ф \cos ж \\
\lambda_y &= \sin э \cos ж + \cos э \sin ж \cos ф \\
\mu_y &= \cos э \cos ж - \sin э \sin ж \cos ф \\
\nu_y &= \sin ф \sin ж \\
\lambda_z &= -\sin ф \cos э \\
\mu_z &= \sin ф \sin э \\
\nu_z &= \cos ф
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5)$$

Къ этому прибавимъ выраженія косинусовъ угловъ, составляемыхъ положительнымъ направленіемъ N съ осями X, $У$, Ξ, Υ:

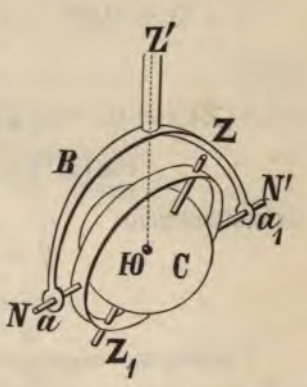
$$\cos(N X) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + ж\right) = -\sin ж; \quad \cos(N У) = \cos ж$$

$$\cos(N \Xi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - э\right) = \sin э; \quad \cos(N \Upsilon) = \cos э.$$

§ 3. Проэкціи угловой скорости на оси координатъ, неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ, и на неподвижныя оси.

Вращеніе твердаго тѣла вокругъ точки $Ю$ можно разложить на три составляющія вращенія нижеслѣдующимъ образомъ.

Представимъ себѣ полукольцо B, могущее вращаться вокругъ оси $ЮZ'$. Въ этомъ полукольцѣ сдѣланы цилиндрическія гнѣзда, сквозь которыя проходятъ шипы a и a_1, неизмѣнно связанные съ кольцомъ K, которое можетъ вращаться вокругъ оси $ЮN$. Въ этомъ кольцѣ K сдѣланы гнѣзда, сквозь которыя проходитъ стержень $Z_1ЮZ$, перпендикулярный къ оси $ЮN$, а къ стержню прикрѣплено тѣло C. Это тѣло можетъ вращаться вокругъ оси Z. Полное вращеніе тѣла C вокругъ точки $Ю$ состоитъ изъ относительнаго вращенія его по отношенію къ кольцу K съ угловою скоростью $э'$ вокругъ оси $ЮZ$, изъ вращенія тѣла вмѣстѣ съ кольцомъ K относительно полукольца B съ угловою скоростью $ф'$ вокругъ оси $ЮN$ и изъ вращенія тѣла C вмѣстѣ съ кольцомъ K и полукольцомъ B съ угловою скоростью $ж'$ вокругъ оси $ЮZ'$.



Черт. 3.

Извѣстно *), что полная угловая скорость Ω составного вращенія вокругъ неподвижной точки, составленнаго изъ трехъ составляющихъ вращеній вокругъ осей пересѣкающихся въ той же точкѣ, есть геометрическая сумма изъ угловыхъ скоростей $э'$, $ф'$, $ж'$ этихъ вращеній:

$$\overline{\Omega} = \overline{э'} + \overline{ф'} + \overline{ж'}.$$

Поэтому проэкція угловой скорости Ω на какое либо направленіе равняется суммѣ проэкцій угловыхъ скоростей $э'$, $ф'$, $ж'$ на то же направленіе.

Возьмемъ за это направленіе ось Ξ и означимъ черезъ p проэкцію угловой скорости Ω на эту ось. Принявъ во вниманіе, что угловая скорость $э'$ направлена по оси Z, угловая скорость $ф'$ направлена по N, а угловая скорость $ж'$ направлена по Z', получимъ:

$$p = \Omega\cos(\Omega\Xi) = э'\cos(Z\Xi) + ф'\cos(N\Xi) + ж'\cos(Z'\Xi);$$

но такъ какъ Z перпендикулярна къ Ξ и косинусы двухъ прочихъ угловъ, какъ показано въ предыдущемъ параграфѣ, равны

*) Основы механики Домогарова, Кинематика, стр. 202.

$\sin э$, $\lambda_2 = -\sin ф \cos э$, то:

$$p = ф' \sin э - ж' \sin ф \cos э \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6,a)$$

Такимъ же образомъ, проэктируя на оси Υ и Z и означивъ проэкціи Ω на эти оси черезъ q и r, получимъ:

$$q = \Omega \cos(\Omega\Upsilon) = э' \cos(\mathsf{Z}\Upsilon) + ф' \cos(N\Upsilon) + ж' \cos(Z'\Upsilon),$$

$$r = \Omega \cos(\Omega\mathsf{Z}) = э' \cos(\mathsf{Z}\mathsf{Z}) + ф' \cos(N\mathsf{Z}) + ж' \cos(Z'\mathsf{Z});$$

здѣсь:

$$\cos(\mathsf{Z}\Upsilon) = 0, \ \cos(\mathsf{Z}\mathsf{Z}) = 1, \ \cos(N\Upsilon) = \cos э, \ \cos(N\mathsf{Z}) = 0,$$

$$\cos(Z'\Upsilon) = \sin ф \sin э, \ \cos(Z'\mathsf{Z}) = \cos ф,$$

слѣдовательно

$$q = ф' \cos э + ж' \sin ф \sin э \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6,b)$$

$$r = э' + ж' \cos ф \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6,c)$$

Такимъ же образомъ можно получить выраженія проэкцій угловой скорости на неподвижныя оси. Эти проэкціи будутъ означены буквами P, Q, R.

$$P = \Omega \cos(\Omega X) = э' \cos(\mathsf{Z}X) + ф' \cos(NX) + ж' \cos(Z'X);$$

но Z' перпендикулярно къ X, слѣдовательно $\cos(Z'X) = 0$, далѣе $\cos(NX) = -\sin ж$, $\cos(\mathsf{Z}X) = \sin ф \cos ж$ (см. § 2-й), поэтому:

$$P = э' \sin ф \cos ж - ф' \sin ж \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7,a)$$

и подобнымъ же образомъ найдемъ

$$Q = э' \sin ф \sin ж + ф' \cos ж \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7,b)$$

$$R = э' \cos ф + ж' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7,c)$$

§ 4. Проэкціи скоростей точекъ твердаго тѣла на оси координатъ неподвижныя и на оси координатъ неизмѣнно связанныя съ твердымъ тѣломъ.

Скорость какой либо точки M твердаго тѣла есть геометрическая сумма двухъ скоростей:

1) *скорости полюса Ю,*

2) *вращательной скорости вокругъ мгновенной оси Ω, проведенной черезъ полюсъ Ю, причемъ величина и направленіе вращатель-*

ной скорости выражаются линейнымъ моментомъ угловой скорости, отложенной отъ точки Ю вокругъ (или относительно) точки M *).

Поэтому проэкція на какое либо направленіе скорости w какой либо точки M (координаты x, y, z) твердаго тѣла равна проэкціи скорости $w_ю$ точки $Ю$, сложенной съ проэкціею вращательной скорости.

Проэкціи скорости w на оси X, $У$, Z равны x' y' z'.

Проэкціи скорости $w_ю$ на тѣ же оси равны $x'_ю$, $y'_ю$, $z'_ю$.

Проэкціи на тѣ же оси радіуса вектора, проведеннаго изъ точки M въ точку $Ю$, равны $(x_ю - x)$, $(y_ю - y)$, $(z_ю - z)$. Проэкціи угловой скорости на тѣ же оси равны P, Q, R. Проэкціи на тѣ же оси момента угловой скорости Ω, отложенной отъ точки $Ю$, вокругъ точки M выразятся слѣдующими разностями *):

$$(y_ю - y)\,R - (z_ю - z)\,Q$$
$$(z_ю - z)\,P - (x_ю - x)\,R$$
$$(x_ю - x)\,Q - (y_ю - y)\,P.$$

Поэтому проэкціи скорости точки M твердаго тѣла на неподвижныя оси координатъ выразятся такъ:

$$\left.\begin{aligned} w\cos(wX) = \frac{dx}{dt} &= \frac{dx_ю}{dt} + (z - z_ю)\,Q - (y - y_ю)\,R \\ w\cos(wУ) = \frac{dy}{dt} &= \frac{dy_ю}{dt} + (x - x_ю)\,R - (z - z_ю)\,P \\ w\cos(wZ) = \frac{dz}{dt} &= \frac{dz_ю}{dt} + (y - y_ю)\,P - (x - x_ю)\,Q. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (8)$$

Проэкціи вращательной скорости на оси Ξ, Υ, Z выразятся аналогичными формулами какъ и проэкціи ея на оси X, $У$, Z; надо только замѣнить величины P, Q, R величинами p, q, r, а величины $(x - x_ю)$, $(y - y_ю)$, $(z - z_ю)$ величинами ξ, η, ζ, такъ какъ первыя суть проэкціи радіуса вектора $ЮM$ на оси X, $У$, Z, а послѣднія — проэкціи его на оси Ξ, Υ, Z; поэтому проэкціи враща-

---

*) См. Основы механики Домогарова, Кинематика, стр. 118.

**) По формуламъ проэкцій линейнаго момента какого либо вектора (16) въ Основахъ механики Домогарова, введеніе стр. 42.

тельной скорости на оси Ξ, Υ и Z равны:

$$\zeta q - \eta r, \quad \xi r - \zeta p, \quad \eta p - \xi q;$$

проэкціи же скорости точки $Ю$ на эти оси мы означимъ такъ:

$$w_{ю} \cos(w_{ю}\Xi) = \alpha_{ю}, \quad w_{ю} \cos(w_{ю}\Upsilon) = \beta_{ю}, \quad w_{ю} \cos(w_{ю}Z)_{ю}.$$

Поэтому проэкціи скорости w точки M твердаго тѣла на оси Ξ, Υ, Z выразятся слѣдующими формулами:

$$\left.\begin{aligned} w \cos(w\Xi) &= \alpha_{ю} + \zeta q - \eta r \\ w \cos(w\Upsilon) &= \beta_{ю} + \xi r - \zeta p \\ w \cos(wZ) &= \gamma_{ю} + \eta p - \xi q \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \quad (9)$$

Слѣдуетъ замѣтить, что проэкціи скорости какой либо точки тѣла (а въ томъ числѣ и точки $Ю$) не выражаются прямо производными отъ координатъ этой точки, какъ выражаются проэкціи ея на неподвижныя оси. Онѣ выражаются въ этихъ производныхъ линейнымъ образомъ, напримѣръ:

$$w \cos(w\Xi) = w \cos(wX) \cos(\Xi X) + \cos(wY) \cos(\Xi Y) + \\ + \cos(wZ) \cos(\Xi Z) =$$

$$\frac{dx}{dt} \lambda_x + \frac{dy}{dt} \lambda_y + \frac{dz}{dt} \lambda_z.$$

Проэкціи на оси координатъ безконечно-малаго перемѣщенія точки M выразятся (пренебрегая безконечно-малыми величинами высшихъ порядковъ) такъ:

$$dx = x'dt, \; dy = y'dt, \; dz = z'dt;$$

поэтому, помноживъ обѣ части равенствъ (8) на dt, получимъ слѣдующія выраженія проэкцій перемѣщенія точки M твердаго тѣла на неподвижныя оси:

$$\left.\begin{aligned} dx &= dx_{ю} + (z - z_{ю}) Q dt - (y - y_{ю}) R dt \\ dy &= dy_{ю} + (x - x_{ю}) R dt - (z - z_{ю}) P dt \\ dz &= dz_{ю} + (y - y_{ю}) P dt - (x - x_{ю}) Q dt \end{aligned}\right\} \cdot \cdot \quad (10)$$

Механика твердыхъ тѣлъ.

§ 5. Раздѣленіе сплошного тѣла на элементы и замѣна каждаго элемента матеріальною точкою. Неизмѣняемая система точекъ плоская и не плоская.

Данное сплошное тѣло мысленно раздѣляютъ на безконечно-малые *элементы объема* и представляютъ себѣ, что масса каждаго элемента сосредоточена въ одной точкѣ; къ этой совокупности матеріальныхъ точекъ примѣняютъ формулы и теоремы механики матеріальныхъ точекъ.

Если сплошное тѣло—твердое, то замѣняющая его система матеріальныхъ точекъ будетъ *неизмѣняемая*, та есть такая, въ которой разстояніе между каждою парою точекъ остается неизмѣннымъ. Если всѣ точки такой системы должны оставаться въ одной плоскости, то система называется плоскою неизмѣняемою системою.

Отдадимъ себѣ отчетъ въ томъ, сколько необходимо стержней, для того, чтобы n точекъ образовали неизмѣняемую систему, и какъ велико число степеней свободы такой системы.

Каждый стержень, т. е. каждая удерживающая связь между точками m_i и m_j, выражается равенствомъ вида:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2 - l_{ij}^2 = 0, \quad . \quad . \quad (11)$$

въ которомъ кромѣ координатъ точекъ входитъ и длина l_{ij} стержня. Изъ n точекъ можно составить $\frac{n(n-1)}{2}$ паръ точекъ и столько же можно провести стержней, но для неизмѣнности системы нѣкоторые стержни окажутся излишними.

Если неизмѣняемая система не плоская, то три точки будутъ неизмѣняемо связаны тремя стержнями, а всякая новая точка, не

находящаяся въ плоскости первыхъ трехъ, должна быть связана съ первыми тремя новыми стержнями, такъ что для неизмѣннаго соединенія между собою:

3-хъ точекъ	требуется	3 стержня
4-хъ »	»	$3 + 3 = 6$ стержней
5-ти »	»	$3 + 2.3 = 9$ стержней.

Однако $\frac{5.4}{2} = 10$ и слѣдовательно при $n = 5$ можно провести еще одинъ стержень лишній, безполезный для неизмѣняемости системы; это именно тотъ, который можетъ соединить четвертую точку съ пятою.

Продолжая такимъ образомъ далѣе, окажется, что для неизмѣняемости системы n точекъ потребуется $3 + (n - 3)\,3 = 3n - 6$ стержней; число же излишнихъ стержней будетъ:

$$\frac{n\,(n-1)}{2} - 3n + 6 = \frac{n^2 - 7n + 12}{2} = \frac{(n-3)\,(n-4)}{2}.$$

И такъ, *число стержней* необходимыхъ для неизмѣняемости неплоской системы равно $3n - 6$; поэтому число степеней свободы такой системы равно $3n - (3n - 6) = 6$.

Для плоской неизмѣняемой системы достаточно двухъ стержней, связывающихъ каждую новую точку съ первыми тремя, а потому число стержней необходимыхъ для неизмѣняемости n точекъ плоской системы равно $3 + (n - 3)\,.\,2 = 2n - 3$; число излишнихъ стержней равно

$$\frac{n\,(n-1)}{2} - 2n + 3 = \frac{n^2 - 5n + 6}{2} = \frac{(n-2)\,(n-3)}{2},$$

а число степеней свободы равно $2n - (2n - 3) = 3$.

§ 6. Дифференціальныя уравненія движенія свободной неизмѣняемой системы.

Если неизмѣняемая система неплоская, то въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія точекъ ея будетъ заключаться столько множителей λ, свойственныхъ неизмѣняемымъ связямъ вида (11) (предыдущій §), сколько необходимо для неизмѣняемости системы.

Въ предыдущемъ параграфѣ объяснено, что число такихъ связей равно $(3n - 6)$; исключивъ изъ $3n$ дифференціальныхъ уравненій

$(3n-6)$ множителей λ, получимъ 6 дифференціальныхъ уравненій неизмѣняемой системы.

Эти шесть дифференціальныхъ уравненій могутъ быть написаны прямо, если примемъ во вниманіе, что реакціи каждаго стержня попарно равны, прямопротивоположны и направлены вдоль по стержню; такъ какъ поэтому главный векторъ всѣхъ этихъ реакцій равенъ нулю и также равенъ нулю главный моментъ реакцій вокругъ всякой точки, то шесть дифференціальныхъ уравненій свободной неизмѣняемой системы будутъ:

1) дифференціальныя уравненія центра инерціи неизмѣняемой системы:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_c}{dt^2} &= B_x \\ M\frac{d^2y_c}{dt^2} &= B_y \\ M\frac{d^2z_c}{dt^2} &= B_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (12)$$

2) дифференціальныя уравненія главнаго момента количествъ движенія вокругъ начала координатъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d(\Lambda_x)}{dt} &= \Lambda_x \\ \frac{d(\Lambda_y)}{dt} &= \Lambda_y \\ \frac{d(\Lambda_z)}{dt} &= \Lambda_z \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

Здѣсь B_x, B_y, B_z суть проэкціи на неподвижныя оси главнаго вектора B всѣхъ силъ, приложенныхъ къ неизмѣняемой системѣ, т. е.:

$$B_x = \sum X_i,\ B_y = \sum Y_i,\ B_z = \sum Z_i, \quad \ldots \quad (14)$$

Λ_x, Λ_y, Λ_z — суть проэкціи на неподвижныя оси главнаго момента вокругъ начала координатъ всѣхъ силъ, приложенныхъ къ точкамъ

неизмѣняемой системы, т. е.:

$$\left.\begin{aligned} Л_x &= \sum (y_i Z_i - z_i Y_i), \\ Л_y &= \sum (z_i X_i - x_i Z_i), \\ Л_z &= \sum (x_i Y_i - y_i X_i). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

$л_x$, $л_y$, $л_z$ — суть проэкціи на неподвижныя оси главнаго момента количествъ движеній системы вокругъ начала координатъ, т. е.:

$$\left.\begin{aligned} л_x &= \sum m_i (y_i z_i' - z_i y_i') \\ л_y &= \sum m_i (z_i x_i' - x_i z_i') \\ л_z &= \sum m_i (x_i y_i' - y_i x_i'). \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Такой же самый видъ (13) будутъ имѣть дифференціальныя уравненія главнаго момента количества движенія вокругъ всякой неподвижной точки, если взять ее за новое начало координатъ.

Сейчасъ покажемъ, что такой же видъ имѣютъ дифференціальныя уравненія главнаго момента количествъ движенія вокругъ центра инерціи.

Проэкціи на неподвижныя оси главнаго момента силъ вокругъ центра инерціи выражаются слѣдующимъ образомъ, напр. проэкція на ось X-овъ:

$$\begin{aligned} (Л_c)_x &= \sum [(y_i - y_c) Z_i - (z_i - z_c) Y_i] = \\ &= \sum (y_i Z_i - z_i Y_i) - y_c \sum Z_i + z_c \sum Y_i = \\ &= Л_x - y_c B_z + z_c B_y. \end{aligned}$$

Проэкція на ось X-овъ главнаго момента количествъ движенія

вокругъ центра инерціи выразится такъ:

$$(л_c)_x = \sum m_i [(y_i - y_c) z_i' - (z_i - z_c) y_i'] =$$

$$= \sum m_i (y_i z_i' - z_i y_i') - y_c \sum m_i z_i' + z_c \sum m_i y_i'$$

$$= л_x - y_c M z_c' + z_c M y_c',$$

потому что, по свойству статическихъ моментовъ:

$$\sum m_i x_i = M x_c, \quad \sum m_i y_i = M y_c, \quad \sum m_i z_i = M z_c,$$

слѣдовательно:

$$\sum m_i x_i' = M x_c',$$

$$\sum m_i y_i' = M y_c',$$

$$\sum m_i z_i' = M z_c'.$$

Изъ этого слѣдуетъ, что первое изъ дифференціальныхъ уравненій (13) можно преобразовать такъ:

$$\frac{d(л_c)_x}{dt} + y_c M z_c'' - z_c M y_c'' = (Л_c)_x + y_c B_z - z_c B_y$$

и отсюда, на основаніи второго и третьяго уравненій (12), получимъ:

$$\frac{d(л_c)_x}{dt} = (Л_c)_x \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17, a)$$

и точно такимъ же образомъ получимъ:

$$\frac{d(л_c)_y}{dt} = (Л_c)_y \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17, b)$$

$$\frac{d(л_c)_z}{dt} = (Л_c)_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17, c)$$

§ 7. Условія, при которыхъ свободная неизмѣняемая система движется параллельно неподвижной плоскости. Дифференціальныя уравненія движенія свободной неизмѣняемой системы, движущейся такимъ образомъ.

Чтобы свободная неизмѣняемая система двигалась параллельно неподвижной плоскости XY необходимо, чтобы центръ инерціи ея

не получалъ ускоренія параллельно оси Z; для этого, какъ видно изъ послѣдняго уравненія (12) предыдущаго параграфа, *необходимо, чтобы* B_z *было равно нулю.* Кромѣ того, при такомъ движеніи, количества движенія точекъ, а слѣдовательно и главный моментъ количества движенія должны быть параллельны оси Z-овъ, слѣдовательно $л_x$ и $л_y$ должны быть равны нулю, а стало быть и ихъ производныя по t, т. е. первыя части двухъ первыхъ дифференціальныхъ уравненій (13) должны быть равны нулю. Для этого *необходимо, чтобы* $Л_x$ *и* $Л_y$ *были равны нулю. Начальныя скорости всѣхъ точекъ неизмѣняемой системы должны быть параллельны плоскости XУ и проэкціи ихъ на эти оси должны выражаться равенствомъ (3) § 1-го.*

Если эти условія соблюдены, то дифференціальныя уравненія движенія неизмѣняемой системы будутъ:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x_c}{dt^2} = B_x,\quad M\frac{d^2y_c}{dt^2} = B_y \ldots . \\ \frac{dл_z}{dt} = Л_z \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \quad (18)$$

На основаніи сказаннаго въ концѣ предыдущаго параграфа, послѣднее дифференціальное уравненіе можетъ быть замѣнено уравненіемъ:

$$\frac{d(л_c)_z}{dt} = (Л_c)_z, \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

гдѣ

$$(л_c)_z = \sum m_i\,[(x_i - x_c)\,y_i' - (y_i - y_c)\,x_i',]$$

$$(Л_c)_z = \sum [(x_i - x_c)\,У_i - (y_i - y_c)\,X_i].$$

Если возьмемъ центръ инерціи системы за точку $Ю$, то на основаніи выраженій (3) § 1-го (вмѣсто x, y, поставить x_i, y_i):

$$x_i' = x_c' - (y_i - y_c)\,э';\quad y_i' = y_c' + (x_i - x_c)\,э',$$

поэтому:

$$(л_c)_z = л_c = y_c'\left(\sum m_i x_i - Mx_c\right) - x_c'\left(\sum m_i y_i - My_c\right) +$$

$$+ э'\sum m_i[(x_i - x_c)^2 + (y_i - y_c)^2].$$

Здѣсь разности, помноженныя на x_c' и y_c' равны нулю, сумма же, помноженная на угловую скорость $э'$, есть *моментъ инерціи системы* вокругъ оси параллельной оси Z-овъ, проведенной черезъ центръ инерціи. Означимъ этотъ моментъ инерціи знакомъ C_c; для неизмѣняемой системы это есть постоянная величина.

Слѣдовательно дифференціальное уравненіе (19) имѣетъ такой видъ:

$$C_c \frac{d^2э}{dt^2} = \sum [(x_i - x_c)\, Y_i - (y_i - y_c)\, X_i] \quad . \quad . \quad (19, \text{bis})$$

§ 8. Проэкціи главнаго момента количествъ движенія вокругъ точки *Ю* на оси координатъ неподвижныя и на оси координатъ, неизмѣняемо связанныя съ системою. Живая сила неизмѣняемой системы.

Въ предыдущемъ параграфѣ показано, что $(л_c)$ выражается произведеніемъ угловой скорости $э'$ на постоянную величину C_c—моментъ инерціи вокругъ оси, проведенной черезъ центръ инерціи параллельно оси Z-овъ. Это относилось къ неизмѣняемой системѣ, движущейся параллельно неподвижной плоскости.

Выведемъ теперь формулы для вычисленія главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы, движущейся какимъ бы то ни было образомъ. Для общности будемъ говорить о главномъ моментѣ вокругъ точки *Ю*, будетъ ли она неподвижная или движущаяся.

Проэкція на неподвижныя оси координатъ главнаго момента количествъ движенія неизмѣняемой системы вокругъ точки *Ю* выражаются такъ:

$$\left.\begin{aligned}
(л_{ю})_x &= \sum m_i [(y_i - y_{ю})\, w_i \cos(w_i Z) - (z_i - z_{ю})\, w_i \cos(w_i Y)] \\
(л_{ю})_y &= \sum m_i [(z_i - z_{ю})\, w_i \cos(w_i X) - (x_i - x_{ю})\, w_i \cos(w_i Z)] \\
(л_{ю})_z &= \sum m_i [(x_i - x_{ю})\, w_i \cos(w_i Y) - (y_i - y_{ю})\, w_i \cos(w_i X)]
\end{aligned}\right\}, \quad (20)$$

проэкціи же того же главнаго момента $л_{ю}$ на оси Ξ, Υ, Z выразятся аналогичными формулами, получаемыми черезъ замѣну проэкцій скорости w_i на оси X, Y, Z — проэкціями ея на оси Ξ, Υ, Z, проэкцій

радіуса вектора $ЮМ_i$ на оси X, $У$, Z — проэкціями его на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$. Эти формулы—слѣдующія:

$$\left.\begin{aligned}(л_ю)_\xi &= л_ю \cos(л_ю\,\Xi) = \sum m_i[\eta_i w_i \cos(w_i\,\mathbf{Z}) - \zeta_i w_i \cos(w_i\,\Upsilon)]\\ (л_ю)_\eta &= л_ю \cos(л_ю\,\Upsilon) = \sum m_i[\zeta_i w_i \cos(w_i\,\Xi) - \xi_i w_i \cos(w_i\,\mathbf{Z})]\\ (л_ю)_\zeta &= л_ю \cos(л_ю\,\mathbf{Z}) = \sum m_i[\xi_i w_i \cos(w_i\,\Upsilon) - \eta_i w_i \cos(w_i\,\Xi)]\end{aligned}\right\}. \quad (21)$$

Такъ какъ линейные моменты и главный линейный моментъ изображаются длинами или векторами, то между проэкціями его на оси неподвижныя и подвижныя должны существовать такія же зависимости, какія существуютъ напримѣръ между проэкціями радіуса вектора $ЮМ$ на тѣ и другія оси, напр.:

$$\left.\begin{aligned}x - x_ю &= \xi\lambda_x + \eta\mu_x + \zeta\nu_x\\ y - y_ю &= \xi\lambda_y + \eta\mu_y + \zeta\nu_y\\ z - z_ю &= \xi\lambda_z + \eta\mu_z + \zeta\nu_z\end{aligned}\right\}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Стало быть:

$$\left.\begin{aligned}(л_ю)_x &= (л_ю)_\xi\,\lambda_x + (л_ю)_\eta\,\mu_x + (л_ю)_\zeta\,\nu_x\\ (л_ю)_y &= (л_ю)_\xi\,\lambda_y + (л_ю)_\eta\,\mu_y + (л_ю)_\zeta\,\nu_y\\ (л_ю)_z &= (л_ю)_\xi\,\lambda_z + (л_ю)_\eta\,\mu_z + (л_ю)_\zeta\,\nu_z\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Въ выраженіяхъ (21) замѣнимъ проэкціи скорости w_i на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ равными имъ выраженіями (9) (вмѣсто w, ξ, η, ζ поставить w_i, ξ_i, η_i, ζ_i):

$$\left.\begin{aligned}(л_ю)_\xi &= M(\eta_c\gamma_ю - \zeta_c\beta_ю) + A_ю\dot{p} - F_ю\dot{q} - E_ю\dot{r}\\ (л_ю)_\eta &= M(\zeta_c\alpha_ю - \xi_c\gamma_ю) + B_ю\dot{q} - D_ю\dot{r} - F_ю\dot{p}\\ (л_ю)_\zeta &= M(\xi_c\beta_ю - \eta_c\alpha_ю) + C_ю\dot{r} - E_ю\dot{p} - D_ю\dot{q}\end{aligned}\right\}. \quad . \quad (23)$$

Здѣсь ξ_c, η_c, ζ_c суть относительныя координаты центра инерціи неизмѣняемой системы, выражаемыя такъ:

$$M\xi_c = \sum m_i\xi_i;\ M\eta_c = \sum m_i\eta_i;\ M\zeta_c = \sum m_i\zeta_i, \quad . \quad . \quad (24)$$

$A_ю, B_ю, C_ю$ суть *моменты инерціи* системы вокругъ осей $Ю\Xi, Ю\Upsilon, Ю\mathbf{Z}$:

$$\left.\begin{aligned} A_ю &= \sum m_i (\eta_i^2 + \zeta_i^2) \\ B_ю &= \sum m_i (\zeta_i^2 + \xi_i^2) \\ C_ю &= \sum m_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) \end{aligned}\right\}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

величины же $D_ю$, $E_ю$, $F_ю$, равныя:

$$D_ю = \sum m_i \eta_i \zeta_i, \quad E_ю = \sum m_i \zeta_i \xi_i, \quad F_ю = \sum m_i \xi_i \eta_i, \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

называются *произведеніями инерціи.*

Въ выраженіяхъ (23) заключаются линейнымъ образомъ величины перемѣнныя $\alpha_ю$, $\beta_ю$, $\gamma_ю$, p, q, r, измѣняющіяся при движеніи, и величины постоянныя: M, ξ_c, η_c, ζ_c, $A_ю$, $B_ю$, $C_ю$, $D_ю$, $E_ю$, $F_ю$ какъ множители перемѣнныхъ величинъ.

Составимъ теперь выраженіе живой силы неизмѣняемой системы и покажемъ, какимъ образомъ изъ этого выраженія могутъ быть получены выраженія (23).

Живая сила неизмѣняемой системы выражается такъ:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i w_i^2$$

или, что то же самое:

$$T = \frac{1}{2} \sum m_i \left[w_i^2 \cos^2 (w_i \Xi) + w_i^2 \cos^2 (w_i \Upsilon) + w_i^2 \cos^2 (w_i \mathbf{Z}) \right].$$

Замѣнивъ проэкціи скорости w_i на оси Ξ, Υ, $\mathbf{Z}$ ихъ выраженіями по формуламъ (9) § 4-го, получимъ:

$$\begin{aligned} T = {} & \frac{1}{2} M w_ю^2 + \\ & + M \left[p (\eta_c \gamma_ю - \zeta_c \beta_ю) + q (\zeta_c \alpha_ю - \xi_c \gamma_ю) + r (\xi_c \beta_ю - \eta_c \alpha_ю) \right] + \\ & + \frac{1}{2} (A_ю p^2 + B_ю q^2 + C_ю r^2 - 2 D_ю qr - 2 E_ю rp - 2 F_ю pq). \quad (27) \end{aligned}$$

Такимъ образомъ моменты и произведенія инерціи $A_ю$, $B_ю$, $C_ю$, $D_ю$, $E_ю$, $F_ю$ входятъ и въ выраженіе живой силы неизмѣняемой

системы и здѣсь они помножены на квадраты и на произведенія величинъ p, q, r.

Если взять производныя отъ T по p, по q, по r, то получимъ вторыя части равенствъ (23), стало быть:

$$(л_ю)_\xi = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad (л_ю)_\eta = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad (л_ю)_\zeta = \frac{\partial T}{\partial r} \quad . \quad . \quad . \quad (28)$$

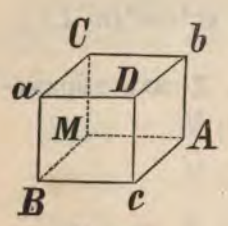
§ 9. Переходъ отъ неизмѣняемой системы точекъ къ сплошному твердому тѣлу.

Мы уже сказали, въ § 5-мъ, что данное сплошное тѣло мысленно раздѣляютъ на безконечно-малые элементы объема и замѣняютъ каждый элементъ одною матеріальною точкою, масса которой равна массѣ элемента.

Совокупность матеріальныхъ точекъ, которою мы замѣняемъ сплошное тѣло, тѣмъ болѣе походитъ на самое тѣло, чѣмъ мельче элементы, поэтому мы раздѣляемъ тѣло на элементы безконечно-малыхъ размѣровъ и предполагаемъ, что размѣры ихъ приближаются къ нулю, а число элементовъ—къ безконечности.

Дробленіе сплошного тѣла на безконечно-малые элементы производится разсѣченіемъ его координатными поверхностями той системы координатъ, помощью которой выражаютъ положеніе точекъ тѣла въ пространствѣ.

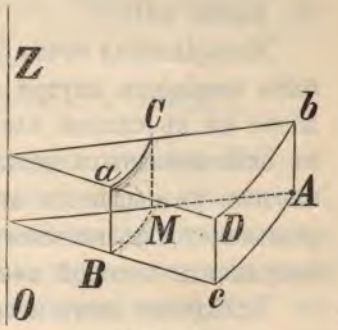
При употребленіи прямолинейныхъ прямоугольныхъ координатъ, внутренніе, не прилегающіе къ наружной поверхности тѣла, элементы объема суть прямоугольные параллелопипеды, грани которыхъ параллельны плоскостямъ координатъ. На черт. 4-мъ изображенъ въ увеличенномъ видѣ одинъ такой элементъ. Буквою M обозначена та вершина его, координатные параметры которой имѣютъ наименьшія величины; пусть они будутъ ξ, η. ζ. Координаты противоположной вершины D будутъ $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ и объемъ такого элемента равенъ $d\xi\, d\eta\, d\zeta$; эту безконечно-малую величину третьяго порядка малости мы будемъ обозначать черезъ dO. Если какая либо часть наружной поверхности тѣла есть плоская грань, параллельная одной изъ плоскостей координатъ, то прилежащіе къ



Черт. 4.

ней элементы объема будутъ также прямоугольными параллелопипедами съ безконечно-малыми ребрами. Элементы объема, прилежащіе съ прочимъ плоскимъ или неплоскимъ частямъ наружной поверхности тѣла, будутъ вообще имѣть видъ отрѣзковъ параллелопипеда, но при достаточномъ уменьшеніи разстояній между разсѣкающими координатными плоскостями можно достигнуть того, что всѣ такіе элементы будутъ имѣть видъ тетраэдровъ, три взаимно-ортогональныя грани которыхъ будутъ плоскіе треугольники, параллельные плоскостямъ координатъ, а четвертая грань будетъ представлять элементъ наружной поверхности тѣла. При приближеніи размѣровъ всѣхъ элементовъ тѣла къ нулю и числа ихъ къ безконечности сумма, объемовъ элементовъ, имѣющихъ видъ параллелопипедовъ, будетъ приближаться къ объему сплошного тѣла, а сумма объемовъ элементовъ, имѣющихъ видъ тетраэдровъ, будетъ притомъ приближаться къ нулю.

При употребленіи полярно-цилиндрическихъ координатъ элементы объема, не прилежащіе къ наружной поверхности тѣла, имѣютъ видъ отрѣзковъ круговыхъ колецъ съ прямоугольными сѣченіями. На чертежѣ 5-мъ изображенъ, въ увеличенномъ видѣ, одинъ изъ такихъ элементовъ. Вершина M имѣетъ координаты ρ, θ, z, противолежащая вершина D имѣетъ координаты $\rho + d\rho$, $\theta + d\theta$, $z + dz$. Шесть граней, которыми ограниченъ этотъ элементъ, суть: плоскости $MAcB$ и $CbDa$, перпендикулярныя къ оси Z-овъ, плоскія грани $aDcB$ и $CbAM$, плоскости которыхъ пересѣкаются въ этой оси Z-овъ и цилиндрическія грани $aCMB$ и $DbAc$, цилиндрическія поверхности которыхъ имѣютъ осью симметріи ось Z-овъ. При безконечной малости длинъ $d\rho = MA$, $\rho d\theta = MB$ и $dz = MC$, объемъ этого элемента разнится на безконечно-малыя величины высшаго порядка малости отъ объема прямоугольнаго параллелопипеда, построеннаго на этихъ трехъ длинахъ, какъ на ребрахъ. Вслѣдствіе этого величину объема этого элемента можно считать равною слѣдующей безконечно-малой величинѣ третьяго порядка:



Черт. 5.

$$dO = d\rho \,.\, \rho d\theta \,.\, dz = \rho d\rho \, d\theta \, dz.$$

Данное сплошное тѣло можетъ быть тѣломъ *однородной плотности*, въ такомъ случаѣ масса каждаго элемента объема тѣла равна σdO, гдѣ σ есть средняя плотность тѣла.

Для вещества неоднородной плотности, средняя плотность части тѣла будетъ имѣть различную величину, смотря по величинѣ и мѣсту положенія взятой части въ тѣлѣ.

Положимъ, что беремъ все болѣе и болѣе уменьшающіяся части сплошного тѣла, заключающія въ себѣ одну и ту же точку его M; пусть Δm есть масса, а ΔO—объемъ всякой части.

По мѣрѣ уменьшенія Δm средняя плотность

$$\frac{\Delta m}{\Delta O}$$

приближается къ нѣкоторому предѣлу, который называется *плотностью вещества въ точкѣ M.*

Слѣдовательно, *плотность вещества въ точкѣ M тѣла есть средняя плотность безконечно-малаго объема dO, заключающаго точку M внутри себя или на своей поверхности.* Если σ есть плотность вещества въ точкѣ M, то масса безконечно-малаго объема dO равна σdO.

Матеріальная точка, которою мы замѣняемъ элементъ тѣла, должна быть помѣщена внутри или на поверхности этого элемента; положеніе ея въ самомъ элементѣ можетъ быть какое угодно, такъ какъ въ окончательныхъ результатахъ предполагается, что размѣры элементовъ уменьшаются до нуля; мы будемъ предполагать, что матеріальная точка помѣщается въ той вершинѣ M элемента (черт. 4 и 5), координаты которой меньше, чѣмъ въ остальныхъ вершинахъ.

Вслѣдствіе этого масса и относительныя координаты центра инерціи сплошного твердаго тѣла выразятся тройными интегралами, взятыми по всему объему тѣла:

$$M = \int\int\int \sigma d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$\xi_c = \frac{1}{M}\int\int\int \sigma\xi\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$\eta_c = \frac{1}{M}\int\int\int \sigma\eta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

$$\zeta_c = \frac{1}{M}\int\int\int \sigma\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

а моменты и произведенія инерціи—интегралами:

$$\left.\begin{aligned} A_{\text{ю}} &= \int\int\int \sigma\,(\eta^2+\zeta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \\ B_{\text{ю}} &= \int\int\int \sigma\,(\zeta^2+\xi^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \\ C_{\text{ю}} &= \int\int\int \sigma\,(\xi^2+\eta^2)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (25,\ \text{bis})$$

$$\left.\begin{aligned} D_{\text{ю}} &= \int\int\int \sigma\eta\zeta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \\ E_{\text{ю}} &= \int\int\int \sigma\zeta\xi\,d\xi\,d\eta\,d\zeta, \\ F_{\text{ю}} &= \int\int\int \sigma\xi\eta\,d\xi\,d\eta\,d\zeta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (26,\ \text{bis})$$

§ 10. Моменты инерціи.

Моментомъ инерціи какой либо системы точекъ вокругъ какой либо оси KU (*K* есть одна изъ тѣхъ точекъ, черезъ которыя ось проходитъ) *называется слѣдующая сумма:*

$$m_1\rho_1^2 + m_2\rho_2^2 + \ldots + m_i\rho_i^2 + \ldots + m_n\rho_n^2,$$

гдѣ $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ суть разстоянія точекъ системы отъ оси KU.

Такую сумму мы будемъ обозначать знакомъ $(I_U)_k$, гдѣ значокъ, поставленный внутри скобокъ, служитъ для обозначенія направленія оси, а значокъ, поставленный внѣ скобокъ,—для обозначенія одной изъ тѣхъ точекъ, черезъ которыя ось проходитъ; напримѣръ, моменты инерціи вокругъ осей, проходящихъ черезъ точку *Ю* и параллельныхъ осямъ *X*-овъ, *У*-овъ и *Z*-овъ мы обозначимъ символами $(I_x)_{\text{ю}}$ $(I_y)_{\text{ю}}$ $(I_z)_{\text{ю}}$.

Моментъ инерціи какого либо сплошного твердаго тѣла вокругъ оси KU выразится интегралomъ:

$$(I_U)_k = \int\int\int \sigma\rho^2 dO,$$

распространеннымъ по всему объему тѣла; здѣсь ρ означаетъ разстояніе элемента dO отъ оси KU.

Моментъ инерціи есть произведеніе изъ массы на квадратъ длины; единица моментовъ инерціи:

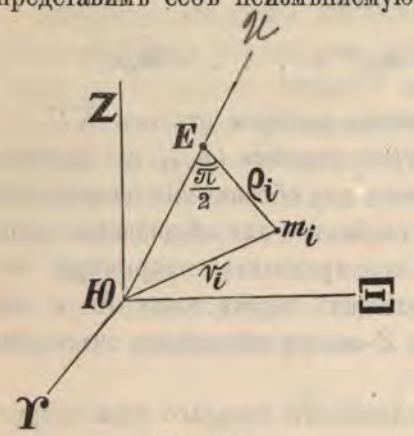
$$(\text{единица моментовъ инерціи}) = м.д^2$$

можетъ быть разсматриваема, какъ моментъ инерціи матеріальной точки, масса которой равна единицѣ и которая отстоитъ отъ оси (вокругъ которой составляютъ моментъ инерціи) на разстояніи, равномъ единицѣ длины.

При одномъ и томъ же относительномъ расположеніи точекъ системы между собою, моменты инерціи системы вокругъ различныхъ осей имѣютъ весьма различныя величины; однако существуетъ нѣкоторая зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ различныхъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, и нѣкоторая зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ различныхъ параллельныхъ между собою осей.

§ 11. Зависимость между моментами инерціи вокругъ осей, проходящихъ черезъ одну и ту же точку. Эллипсоидъ инерціи. Главныя оси инерціи.

Для оріентированія данной системы точекъ или сплошного тѣла, представимъ себѣ неизмѣняемую среду, въ которой эта система или тѣло расположены, и проведемъ черезъ точку *Ю*, черезъ которую проходятъ разсматриваемыя оси, координатныя оси *Ю*Ξ, *Ю*Υ, *Ю*Z, неизмѣнно связанныя со средою.



Черт. 6.

Означимъ черезъ λ, μ, ν косинусы угловъ, составляемыхъ съ этими осями координатъ какою либо осью *Ю*U, направленіе которой на чертежѣ 6-мъ обозначено черезъ *Ю*E; пусть m_i есть одна изъ точекъ системы, r_i — радіусъ-векторъ ея, проведенный изъ точки *Ю*; ξ_i, η_i, ζ_i — ея координаты относительно осей Ξ, Υ, Z; ρ_i — разстояніе ея отъ оси *Ю*U.

Очевидно:

$$\rho_i^2 = r_i^2 \sin^2(r_i, U) = r_i^2 - r_i^2 \cos^2(r_i, U);$$

но:

$$r_i^2 = \xi_i^2 + \eta_i^2 + \zeta_i^2;\ \cos(r_i, U) = \xi_i\lambda + \eta_i\mu + \zeta_i\nu,$$

поэтому:

$$\rho_i^2 = (1-\lambda^2)\xi_i^2 + (1-\mu^2)\eta_i^2 + (1-\nu^2)\zeta_i^2 - 2\mu\nu\eta_i\zeta_i - 2\nu\lambda\zeta_i\xi_i - 2\lambda\mu\zeta_i\eta_i;$$

далѣе:

$$1-\lambda^2 = \mu^2 + \nu^2,\ 1-\mu^2 = \nu^2 + \lambda^2,\ 1-\nu^2 = \lambda^2 + \mu^2,$$

поэтому:

$$\rho_i^2 = \lambda^2(\eta_i^2 + \zeta_i^2) + \mu^2(\zeta_i^2 + \xi_i^2) + \nu^2(\xi_i^2 + \eta_i^2) - 2\mu\nu\eta_i\zeta_i - 2\nu\lambda\zeta_i\xi_i - 2\lambda\mu\xi_i\eta_i.$$

Отсюда получимъ слѣдующее выраженіе для момента инерціи системы или сплошного твердаго тѣла вокругъ оси $ЮU$:

$$(I_U)_ю = A_ю\lambda^2 + B_ю\mu^2 + C_ю\nu^2 - 2D_ю\mu\nu - 2E_ю\nu\lambda - 2F_ю\lambda\mu, \quad (29)$$

гдѣ $A_ю$, $B_ю$, $C_ю$, $D_ю$, $E_ю$, $F_ю$, суть величины, выражаемыя интегралами (25, bis), (26, bis).

Эта формула выражаетъ зависимость между величинами моментовъ инерціи вокругъ осей, проведенныхъ черезъ точку $Ю$; чтобы представить эту зависимость въ болѣе наглядной формѣ, отложимъ отъ $Ю$ по $ЮU$ длину $\mathfrak{r}$, относящуюся къ единицѣ длины такъ, какъ корень изъ единицы моментовъ инерціи относится къ корню изъ $(I_U)_ю$, т. е.:

$$\mathfrak{r} = \frac{\partial^2\sqrt{м}}{\sqrt{(I_U)_ю}},$$

координаты конца этой длины будутъ:

$$\xi = \mathfrak{r}\lambda,\ \eta = \mathfrak{r}\mu,\ \zeta = \mathfrak{r}\nu,$$

а потому равенство (29) можно преобразовать къ слѣдующему виду:

$$1 = \frac{1}{мю^4}[A_ю\xi^2 + B_ю\eta^2 + C_ю\zeta^2 - 2D_ю\eta\zeta - 2E_ю\zeta\xi - 2F_ю\xi\eta]. \quad (30)$$

Если представить себѣ, что то же самое сдѣлано для всевозможныхъ направленій, проведенныхъ изъ точки $Ю$, то концы длинъ $\mathfrak{r}$ образуютъ поверхность, выражаемую уравненіемъ (30).

Эта поверхность есть одна изъ поверхностей второго порядка, имѣющая центръ въ точкѣ *Ю*; не трудно убѣдиться, что это можетъ быть либо эллипсоидъ, либо круговой цилиндръ.

Въ самомъ дѣлѣ, если поверхность (30) имѣетъ безконечно-длинные радіусы-векторы, то эти радіусы должны быть направлены по тѣмъ осямъ, вокругъ которыхъ моменты инерціи системы точекъ равны нулю; но такихъ осей можетъ быть только одна, и то въ томъ только случаѣ, если вдоль по ней расположены всѣ точки системы; поэтому, либо всѣ радіусы-векторы поверхности (30) имѣютъ конечныя длины (тогда это есть эллипсоидъ), либо только два радіуса-вектора, прямопротивоположные другъ другу, безконечно велики (тогда это есть цилиндрическая поверхность съ круговымъ основаніемъ).

Въ частности, эллипсоидъ можетъ быть эллипсоидомъ вращенія планетарнымъ или удлиненнымъ, или сферою.

Круговой цилиндръ можно разсматривать тоже какъ эллипсоидъ, одна изъ главныхъ осей котораго удлинена до безконечности, а двѣ прочія главныя оси равны между собою; такъ что можно сказать, что поверхность (30) есть эллипсоидъ или которая либо изъ его разновидностей. Эту поверхность называютъ *эллипсоидомъ инерціи* (данной системы точекъ или твердаго тѣла) *для точки Ю*.

Если оси координатъ *Ю*Ξ, *Ю*Υ, *Ю*Z совмѣстимъ съ главными осями эллипсоида инерціи, то уравненіе его должно будетъ получить слѣдующій видъ:

$$1 = \frac{1}{Md^4}\left[\mathfrak{A}_{\text{ю}}\xi^2 + \mathfrak{B}_{\text{ю}}\eta^2 + \mathfrak{C}_{\text{ю}}\zeta^2\right]; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

слѣдовательно, величина момента инерціи данной системы матеріальныхъ точекъ вокругъ оси *Ю U*, составляющей съ главными осями эллипсоида инерціи углы, косинусы которыхъ суть λ, μ, ν, можетъ быть выражена слѣдующею формулою:

$$(I_U)_{\text{ю}} = \mathfrak{A}_{\text{ю}}\lambda^2 + \mathfrak{B}_{\text{ю}}\mu^2 + \mathfrak{C}_{\text{ю}}\nu^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

Главныя оси эллипсоида инерціи называются *главными осями инерціи* (данной системы точекъ или сплошного тѣла) *въ той точкѣ Ю, въ которой эллипсоидъ имѣетъ свой центръ*.

Величины $\mathfrak{A}_{\text{ю}}$, $\mathfrak{B}_{\text{ю}}$, $\mathfrak{C}_{\text{ю}}$ суть моменты инерціи системы вокругъ главныхъ осей инерціи въ точкѣ *Ю*; интегралы же или суммы вида (26, bis), такъ называемыя products of inertia, при этихъ осяхъ коор-

динатъ равны нулю, какъ видно изъ сравненія выраженія (32) съ выраженіемъ (29).

Такъ какъ за точку *Ю* можетъ быть взята какая угодно точка твердаго тѣла, то можемъ сказать слѣдующее:

Черезъ всякую точку можно провести три такія взаимно-перпендикулярныя оси, что если возьмемъ эти оси за оси координатъ, то products of inertia данной системы (или сплошного твердаго тѣла) будутъ равны нулю; эти три оси суть главныя оси инерціи данной системы (или сплошного твердаго тѣла) въ разсматриваемой точкѣ.

Эллипсоидъ инерціи для центра инерціи (даннаго твердаго тѣла) называется *центральнымъ эллипсоидомъ инерціи*, главныя оси его—*главными центральными осями инерціи* твердаго тѣла, а моменты инерціи $\mathfrak{A}_c$, $\mathfrak{B}_c$, $\mathfrak{C}_c$ вокругъ этихъ осей $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, $C\mathrm{Z}_0$ — *главными центральными моментами инерціи тѣла.*

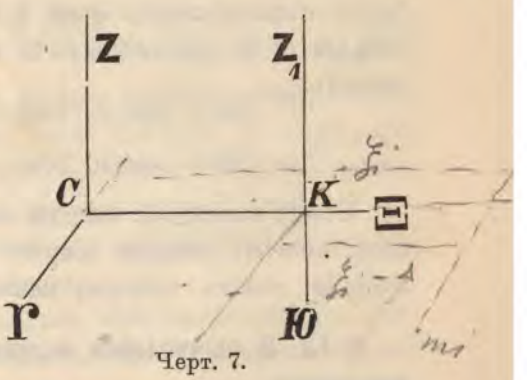
Величина момента инерціи даннаго твердаго тѣла вокругъ оси CU, проходящей черезъ центръ инерціи тѣла, выразится формулою:

$$(I_U)_c = \mathfrak{A}_c\lambda^2 + \mathfrak{B}_c\mu^2 + \mathfrak{C}_c\nu^2, \quad \ldots\ldots (33)$$

если за оси координатъ взяты главныя центральныя оси инерціи $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, $C\mathrm{Z}_0$.

§ 12. Зависимость между моментами инерціи вокругъ параллельныхъ осей.

1) Пусть черезъ точку *Ю* проведена какая либо ось, а черезъ центръ инерціи C—другая, ей параллельная; возьмемъ C за начало координатъ, послѣднюю ось—за координатную ось $C\mathrm{Z}$, плоскость, проходящую черезъ обѣ оси,—за координатную плоскость $\mathrm{Z}C\Xi$ (черт. 7), означимъ черезъ $(I_\zeta)_c$ моментъ инерціи данной системы вокругъ оси $C\mathrm{Z}$, черезъ $(I_\zeta)_ю$ моментъ инерціи ея вокругъ оси $Ю\mathrm{Z}_1$ и черезъ Δ—разстояніе CK между осями.



Черт. 7.

Моменты инерціи системы вокругъ осей $C\mathrm{Z}$ и $Ю\mathrm{Z}_1$ выразятся

слѣдующими суммами:

$$(I\zeta)_c = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2), \quad (I\zeta)_\omega = \sum_{i=1}^{i=n} m_i[(\xi_i - \Delta)^2 + \eta_i^2),$$

послѣднюю же сумму можно представить такъ:

$$(I\zeta)_\omega = \sum_{i=1}^{i=n} m_i(\xi_i^2 + \eta_i^2) - 2\Delta \sum_{i=1}^{i=n} m_i\xi_i + M\Delta^2;$$

но такъ какъ точка C есть центръ инерціи, то сумма, заключающаяся во второмъ членѣ второй части, равна нулю, а потому:

$$(I\zeta)_\omega = (I\zeta)_c + M\Delta^2 \ldots\ldots (34)$$

и вообще:

$$(I_U)_k = (I_U)_c + M\Delta^2 \ldots\ldots (35)$$

Если бы всѣ точки данной системы были сосредоточены въ ея центрѣ инерціи, то моментъ инерціи ея вокругъ оси KU былъ бы равенъ произведенію $M\Delta^2$. Выведенная здѣсь формула (35) выражаетъ, что *моментъ инерціи данной системы вокругъ какой либо оси, непроходящей черезъ центръ инерціи, равняется суммѣ, составленной изъ момента инерціи этой же системы вокругъ параллельной оси, проведенной черезъ центръ инерціи и изъ того момента инерціи, который система имѣла бы, если бы была вся сосредоточена въ своемъ центрѣ инерціи.*

Между величинами моментовъ инерціи данной системы вокругъ двухъ параллельныхъ осей KU и K_1U_1, отстоящихъ отъ центра инерціи C на разстояніяхъ Δ и Δ_1, существуетъ слѣдующая зависимость:

$$(\text{Мом. инерц. вокругъ оси } KU) - M\Delta^2 =$$
$$= (\text{Мом. инерц. вокругъ оси } K_1U_1) - M\Delta_1^2.$$

Между моментами инерціи вокругъ всевозможныхъ параллельныхъ осей, моментъ инерціи вокругъ той оси, которая проходитъ центръ инерціи, имѣетъ величину наименьшую.

§ 13. О вычисленіи моментовъ инерціи сплошныхъ тѣлъ и площадей.

Зная направленія главныхъ центральныхъ осей инерціи $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0 даннаго тѣла и величины главныхъ центральныхъ момен-

товъ инерціи, можемъ опредѣлить направленія главныхъ осей и величины главныхъ моментовъ въ какой угодно точкѣ K.

Означимъ черезъ ξ_k, η_k, ζ_k координаты этой точки K относительно осей $C\Xi_0$, $C\Upsilon_0$, CZ_0 и черезъ λ, μ, ν—косинусы угловъ, составляемыхъ съ этими осями направленіями параллельныхъ между собою осей KU и CU, проведенныхъ черезъ точки K и C; квадратъ разстоянія Δ точки K отъ оси CU можно выразить такъ:

$$\Delta^2 = r_k^2 - r_k^2 \cos(r_k, U) = \lambda^2(\eta_k^2 + \zeta_k^2) + \mu^2(\zeta_k^2 + \xi_k^2) + \\ + \nu^2(\xi_k^2 + \eta_k^2) - 2\mu\nu\eta_k\zeta_k - 2\nu\lambda\zeta_k\xi_k - 2\lambda\mu\xi_k\eta_k,$$

поэтому изъ равенства (35) и выраженія (31) получимъ слѣдующее выраженіе величины момента инерціи тѣла вокругъ оси KU:

$$(I_U)_k = A_k\lambda^2 + B_k\mu^2 + C_k\nu^2 - 2D_k\mu\nu - 2E_k\nu\lambda - 2F_k\gamma\mu, \quad . \quad . \quad (36)$$

$$A_k = \mathfrak{A}_c + M(\eta_k^2 + \zeta_k^2), \qquad D_k = M\eta_k\zeta_k,$$
$$B_k = \mathfrak{B}_c + M(\zeta_k^2 + \xi_k^2), \qquad E_k = M\zeta_k\xi_k,$$
$$C_k = \mathfrak{C}_c + M(\xi_k^2 + \eta_k^2), \qquad F_k = M\xi_k\eta_k.$$

Если точка K лежитъ на которой либо изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи, то главныя оси инерціи $K\Xi$, $K\Upsilon$, KZ параллельны главнымъ центральнымъ осямъ: напримѣръ, если K находится на оси $C\Xi_0$, то η_k и ζ_k равны нулю, а слѣдовательно и D_k, F_k, F_k; такъ что выраженіе (36) будетъ имѣть въ этомъ случаѣ слѣдующій видъ:

$$(I_U)_k = \mathfrak{A}_c\lambda^2 + (\mathfrak{B}_c + M\xi_k^2)\mu^2 + (\mathfrak{C}_c + M\xi_k^2)\nu^2 \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Если раздѣлить моментъ инерціи данной системы матеріальныхъ точекъ вокругъ какой либо оси на массу системы, и затѣмъ изъ частнаго извлечь квадратный корень, то получится нѣкоторая длина, называемая *плечомъ инерціи данной* системы вокругъ этой оси.

При опредѣленіи направленій главныхъ осей инерціи весьма полезно имѣть въ виду слѣдующія замѣчанія.

1) Если система точекъ или сплошное тѣло имѣетъ полную симметрію относительно нѣкоторой плоскости, такъ что кратчайшія разстоянія между взаимно-симметричными элементами перпендикулярны къ этой плоскости и дѣлятся ею пополамъ, то для каждой изъ точекъ этой плоскости двѣ главныя оси инерціи заключаются въ са-

мой плоскости, а третья перпендикулярна къ ней. Въ самомъ дѣлѣ, если принять эту плоскость за плоскость XY, то D_k и E_k будутъ равны нулю, потому что каждому элементу dm, имѣющему какія либо координаты x, y, z, соотвѣтствуетъ симметрично-расположенный элементъ, имѣющій ту же самую массу dm и координаты $x, y, (-z)$; поэтому всѣ элементы суммъ:

$$D_k = \sum myz, \quad E_k = \sum mzx$$

или интеграловъ:

$$D_k = \int\int\int yzdm, \quad E_k = \int\int\int zxdm$$

попарно сокращаются, а слѣдовательно, уравненіе эллипсоида инерціи будетъ:

$$\partial^4 . M = A_k x^2 - 2F_k xy + B_k y^2 + \mathfrak{C}_k z^2.$$

2) Если однородное сплошное тѣло имѣетъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи (которыя проходятъ черезъ центръ инерціи), то пересѣченія этихъ осей суть главныя центральныя оси инерціи тѣла.

3) Если всѣ точки системы находятся въ одной плоскости, или сплошное тѣло имѣетъ видъ безконечно-тонкой плоской пластинки, то для всякой точки этой плоскости или пластинки одна изъ главныхъ осей инерціи перпендикулярна къ плоскости. Если эту плоскость принять за плоскость XY, то для всѣхъ точекъ системы или элементовъ пластинки координата $z = 0$, а потому:

$$A_k = \sum my^2, \quad B_k = \sum mx^2$$

$$C_k = \mathfrak{C}_k = \sum m(x^2 + y^2) = A_k + B_k$$

$$D_k = 0, \quad E_k = 0, \quad F_k = \sum mxy.$$

4) Если система матеріальныхъ точекъ имѣетъ ось симметріи, или сплошное однородное тѣло есть тѣло вращенія, то, для всякой точки оси симметріи, эллипсоидъ инерціи есть эллипсоидъ вращенія.

Обращаемся къ примѣрамъ. Прежде всего приведемъ нѣсколько примѣровъ вычисленія главныхъ центральныхъ моментовъ инерціи

сплошныхъ однородныхъ тѣлъ, имѣющихъ три взаимно-перпендикулярныя плоскости симметріи. Въ этихъ случаяхъ удобнѣе всего вычислять слѣдующія величины по слѣдующимъ формуламъ:

$$\mathfrak{A}'_c = \sigma \int\int\int \xi^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = 2\sigma \int_0^{\xi_1} \xi^2 Q_\xi \, d\xi, \quad . \quad . \quad . \quad (38;\ 1)$$

$$\mathfrak{B}'_c = \sigma \int\int\int \eta^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = 2\sigma \int_0^{\eta_1} \eta^2 Q_\eta \, d\eta \quad . \quad . \quad . \quad (38;\ 2)$$

$$\mathfrak{C}'_c = \sigma \int\int\int \zeta^2 \, d\xi \, d\eta \, d\zeta = 2\sigma \int_0^{\zeta_1} \zeta^2 Q_\zeta \, d\zeta, \quad . \quad . \quad (38;\ 3)$$

гдѣ Q_ξ есть величина площади сѣченія тѣла координатною плоскостью ξ, а ξ_1 предѣльная координата тѣла по оси Ξ_0; Q_η, Q_ζ, η_1, ζ_1 имѣютъ соотвѣтственныя значенія по отношенію къ координатамъ η и ζ.

Примѣръ 1-й. Вычислить главные центральные моменты инерціи однороднаго эллипсоида:

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 1.$$

Въ этомъ случаѣ:

$$\xi_1 = a, \quad \eta_1 = b, \quad \zeta_1 = c,$$

$$Q_\xi = \pi bc\left(1 - \frac{\xi^2}{a^2}\right), \quad Q_\eta = \pi ca\left(1 - \frac{\eta^2}{b^2}\right), \quad Q_\zeta = \pi ab\left(1 - \frac{\zeta^2}{c^2}\right),$$

$$\mathfrak{A}'_c = M\frac{a^2}{5}, \quad \mathfrak{B}'_c = M\frac{b^2}{5}, \quad \mathfrak{C}'_c = M\frac{c^2}{5}.$$

Поэтому:

$$\mathfrak{A}_c = \frac{M}{5}(b^2+c^2), \quad \mathfrak{B}_c = \frac{M}{5}(c^2+a^2), \quad \mathfrak{C}_c = \frac{M}{5}(a^2+b^2).$$

Если $a > b > c$, то $\mathfrak{A}_c < \mathfrak{B}_c < \mathfrak{C}_c$, т. е. вокругъ наибольшей полуоси моментъ инерціи наименьшій и вокругъ наименьшей полуоси—наибольшій; поэтому наибольшая главная полуось центральнаго эллипсоида инерціи направлена по оси Ξ_0, средняя — по оси Υ_0, меньшая — по оси Z_0.

Если данный эллипсоидъ есть эллипсоидъ вращенія, то таковъ же и центральный эллипсоидъ инерціи; притомъ *удлиненный* сплошной эллипсоидъ имѣетъ *удлиненный* центральный эллипсоидъ инерціи и, обратно, *планетарный* сплошной эллипсоидъ имѣетъ *планетарный* же эллипсоидъ инерціи. Если $a = b$, то:

$$\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \frac{M}{5}(c^2 + a^2),\ \mathfrak{C}_c = \frac{2}{5}Ma^2;$$

моменты инерціи вокругъ всѣхъ экваторіальныхъ центральныхъ осей равны между собою и равны $\mathfrak{A}_c$.

Центральный моментъ инерціи сплошного однороднаго шара вокругъ какой либо центральной оси равенъ $\frac{2}{5}MR^2$, гдѣ R есть радіусъ шара.

Примѣръ 2-й. Главные центральные моменты инерціи однороднаго прямоугольнаго параллелопипеда, длины сторонъ котораго $2a$, $2b$, $2c$.

Здѣсь:

$$\xi_1 = a,\ \eta_1 = b,\ \zeta_1 = c,\ Q_\xi = 4bc,\ Q_\eta = 4ca,\ Q_\zeta = 4ab,$$

$$\mathfrak{A}_c = \frac{M}{3}(b^2 + c^2),\ \mathfrak{B}_c = \frac{M}{3}(c^2 + a^2),\ \mathfrak{C}_c = \frac{M}{3}(a^2 + b^2);$$

(главныя центральныя оси инерціи перпендикулярны къ гранямъ параллелопипеда).

Кубъ имѣетъ центральнымъ эллипсоидомъ шаръ; моментъ инерціи вокругъ всякой центральной оси равенъ $\frac{2}{3}Ma^2$, гдѣ $2a$—сторона куба.

Примѣръ 3-й. Главные центральные моменты инерціи прямого однороднаго эллиптическаго цилиндра (высота $2h$, полуоси основанія b и c).

$$\mathfrak{A}_c = \frac{M}{4}(b^2 + c^2),\ \mathfrak{B}_c = M\left(\frac{h^2}{3} + \frac{c^2}{4}\right),\ \mathfrak{C}_c = M\left(\frac{h^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right).$$

Далѣе, приведемъ примѣръ вычисленія главныхъ центральныхъ моментовъ однородныхъ тѣлъ вращенія.

Для вычисленія момента инерціи такого тѣла вокругъ оси вращенія CZ_0 выразимъ элементы объема въ круговыхъ цилиндрическихъ координатахъ и произведемъ интегрированіе по θ въ предѣ-

лахъ отъ нуля до 2π; получимъ:

$$\mathfrak{C}_c = 2\pi\sigma \int\int \rho^3 \, d\rho \, d\zeta.$$

Вслѣдствіе симметріи тѣла вокругъ оси вращенія, нижеслѣдующія величины равны между собою и потому равны половинѣ $\mathfrak{C}_c$.

$$\mathfrak{A}'_c = \mathfrak{B}'_c = \frac{1}{2}\mathfrak{C}_c;$$

наконецъ моментъ инерціи тѣла вокругъ всякой центральной экваторіальной оси равенъ:

$$\mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = \sigma \int \zeta^2 Q_\zeta \, d\zeta + \frac{1}{2}\mathfrak{C}_c.$$

Примѣръ 4-й. Главные центральные моменты инерціи цилиндрической круговой трубки; длина трубки $2h$, радіусъ внутренней поверхности R, толщина стѣнки k.

Въ выраженіи $\mathfrak{C}_c$ надо интегрировать по ρ въ предѣлахъ отъ R до $(R+k)$ и по ζ въ предѣлахъ отъ $(-h)$ до $(+h)$.

$$\mathfrak{C}_c = \frac{M}{2}(2R^2 + 2Rk + k^2); \quad \mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = M\frac{h^2}{3} + \frac{1}{2}\mathfrak{C}_c.$$

Если R равно нулю, а $k = R_1$, то это тѣло обращается въ *сплошной цилиндръ высоты* $2h$ *и радіуса* R_1; для него

$$\mathfrak{C} = \frac{M}{2}R_1^2, \quad \mathfrak{A}_c = \mathfrak{B}_c = M\left(\frac{h^2}{3} + \frac{R_1^2}{4}\right).$$

Положимъ, что потребуется опредѣлить главные центральные моменты инерціи однороднаго цилиндрическаго тѣла, ограниченнаго боковою цилиндрическою поверхностью какого либо вида и двумя плоскими основаніями, перпендикулярными къ производящимъ боковой поверхности. Очевидно, что одна изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи будетъ ось, параллельная производящимъ, проведенная черезъ центръ C тяжести тѣла; возьмемъ ее за ось Z-овъ, а за оси X-овъ и Y-овъ возьмемъ двѣ взаимно-перпендикулярныя оси, проведенныя черезъ точку C въ плоскости сѣченія, проведеннаго черезъ эту точку параллельно основаніямъ. Составимъ выраженія для величинъ A_c, B_c, F_c и $\mathfrak{C}_c$ и въ этихъ выраженіяхъ произведемъ инте-

грированія по z въ предѣлахъ отъ $z = -h$ до $z = +h$: тогда получимъ:

$$A_c = B_c' + \mathfrak{C}_c', \quad B_c = A_c' + \mathfrak{C}_c',$$

$$A_c' = 2h\sigma \int\int x^2 dxdy, \quad B_c' = 2h\sigma \int\int y^2 dxdy,$$

$$\mathfrak{C}_c = \frac{2h^3}{3}\sigma \int\int dydy, \quad \mathfrak{C}_c = A_c' + B_c'$$

$$F_c = 2h\sigma \int\int xydxdy,$$

гдѣ интегралы распространены по всей площади сѣченія цилиндра.

Въ этихъ формулахъ заключаются четыре интеграла, изъ которыхъ одинъ, входящій въ выраженіе $\mathfrak{C}_c$, выражаетъ величину площади сѣченія, другіе же три, а именно:

$$J_y = \int\int x^2 dxdy,$$

$$J_x = \int\int y^2 dxdy,$$

$$S = \int\int xydxdy$$

суть *моменты инерціи площади сѣченія* вокругъ осей CY и CX и *произведеніе инерціи* этой площади для осей X и Y.

Моменты инерціи площадей и плоскихъ фигуръ встрѣчаются въ формулахъ теоріи упругости, относящихся къ вопросамъ изгиба и крученія призматическихъ тѣлъ.

§ 14. Вращеніе твердаго тѣла вокругъ постоянной неподвижной оси. Дифференціальное уравненіе вращенія. Физическій маятникъ.

Мы разсмотримъ теперь вопросъ о вращеніи твердаго тѣла вокругъ постоянной неподвижной оси. При такомъ движеніи твердое тѣло имѣетъ только одну степень свободы, вполнѣ же свободное твердое тѣло имѣетъ шесть степеней свободы. Для ограниченія пяти степеней свободы требуется пять связей. Мы представимъ эти связи нижеслѣдующимъ образомъ. Точку O мы возьмемъ на той оси тѣла, которая должна служить постоянною осью вращенія; ось Z совмѣстимъ съ этою осью. На ней возьмемъ еще двѣ точки: K_1 на поло-

жительной оси Z въ растоянія k отъ $Ю$, другую K_2 на отрицательной оси Z въ такомъ же разстояніи k отъ $Ю$. Точку K_1 подчинимъ двумъ связамъ, принуждающимъ ее оставаться въ плоскостяхъ $ZOУ$ и ZOX, точку K_2 подчинимъ также двумъ связамъ, принуждающимъ ее оставаться въ плоскостяхъ $ZOУ$ и ZOX, точку $Ю$ подчинимъ связи, принуждающей ее оставаться въ плоскости $XУ$. Реакціи этихъ связей означимъ слѣдующими знаками. Реакція связи, заставляющей точку K_1 оставаться въ плоскости $ZOУ$, означимъ черезъ λ_1, она приложена къ точкѣ K_1 и параллельна оси X-овъ; реакцію связи, заставляющей ту же точку оставаться въ плоскости ZOX, означимъ черезъ λ_2, она приложена къ той же точкѣ K_1 и параллельна оси $У$; реакцію связи, принуждающей точку K_2 оставаться въ плоскости $ZOУ$, означимъ черезъ λ_3, она приложена къ этой точкѣ K_2 и параллельна оси X-овъ; реакцію связи, принуждающей ту же точку оставаться въ плоскости ZOX и приложенную къ той же точкѣ K_2, означимъ черезъ λ_4; она параллельна оси $У$; наконецъ черезъ λ_5 означимъ реакцію связи, заставляющей точку $Ю$ оставаться въ плоскости $XУ$. Такъ какъ точка $Ю$ совпадаетъ съ началомъ координатъ O, то λ_5 направлена по оси OZ.

Къ твердому тѣлу могутъ быть приложены какія либо силы, главный векторъ которыхъ есть B, главный моментъ вокругъ точки $Ю$ или начала координатъ O есть $Л$.

Разсматривая теперь твердое тѣло какъ свободное, но къ которому кромѣ этихъ силъ еще реакціи λ_1, λ_2, λ_3, λ_4, λ_5, составимъ шесть дифференціальныхъ уравненій вида (12) и (13) § 6-го, получимъ:

$$M\frac{d^2x_c}{dt^2} = B_x + \lambda_1 + \lambda_3 \quad \ldots\ldots (39;1)$$

$$M\frac{d^2y_c}{dt^2} = B_y + \lambda_2 + \lambda_4 \quad \ldots\ldots (39;2)$$

$$0 = B_z + \lambda_5 \quad \ldots\ldots (39;3)$$

$$\frac{dл_x}{dt} = Л_x + (\lambda_4 - \lambda_2)k \quad \ldots\ldots (39;4)$$

$$\frac{dл_y}{dt} = Л_y + (\lambda_1 - \lambda_3)k \quad \ldots\ldots (39;5)$$

$$\frac{dл_z}{dt} = Л_z \quad \ldots\ldots (39;6).$$

Въ уравненіи (39;3) первая часть равна нулю, потому что координаты z всѣхъ точекъ тѣла, а слѣдовательно и координата z_c (центра инерціи) остаются постоянными.

Что касается до другихъ входящихъ въ эти уравненія величинъ: x_c, y_c, Λ_x, Λ_y, Λ_z, то должно замѣтить слѣдующее.

Если взять ось $Ю\Xi$ такимъ образомъ, чтобы въ плоскости $Z\Xi$ заключался центръ инерціи, такъ что η_c будетъ равно нулю, то $x_c = \xi_c \cos \vartheta$, $y_c = \xi_c \sin \vartheta$.

Λ_x, Λ_y, Λ_z или $(\Lambda_{ю})_x$, $(\Lambda_{ю})_y$, $(\Lambda_{ю})_z$ по формуламъ (22) § 8-го въ настоящемъ случаѣ (когда $\lambda_x = \cos \vartheta$, $\mu_x = -\sin \vartheta$, $\lambda_y = \sin \vartheta$, $\mu_y = \cos \vartheta$, $\nu_z = 1$, а прочіе косинусы равны нулю), выразятся такъ:

$$\Lambda_x = \Lambda_\xi \cos \vartheta - \Lambda_\eta \sin \vartheta$$

$$\Lambda_y = \Lambda_\xi \sin \vartheta + \Lambda_\eta \cos \vartheta$$

$$\Lambda_z = \Lambda_\zeta ,$$

а по формуламъ (23) того же §, имѣя въ виду, что точка $Ю$ неподвижна и что угловая скорость направлена на оси Z, такъ что $p = 0$, $q = 0$, $r = \vartheta'$:

$$\Lambda_\xi = -E_{ю}\vartheta', \quad \Lambda_\eta = -D_{ю}\vartheta', \quad \Lambda_\zeta = C_{ю}\vartheta'.$$

Поэтому первыя пять уравненій (39) будутъ:

$$M\xi_c \frac{d^2 \cos \vartheta}{dt^2} = B_x + \lambda_1 + \lambda_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40;1)$$

$$M\xi_c \frac{d^2 \sin \vartheta}{dt^2} = B_y + \lambda_2 + \lambda_4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40;2)$$

$$0 = B_z + \lambda_5 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40;3)$$

$$-E_{ю}\frac{d(\vartheta' \cos \vartheta)}{dt} + D_{ю}\frac{d(\vartheta' \sin \vartheta)}{dt} = \Lambda_x + (\lambda_4 - \lambda_2)k \quad . \quad (40;4)$$

$$-E_{ю}\frac{d(\vartheta' \sin \vartheta)}{dt} - D_{ю}\frac{d(\vartheta' \cos \vartheta)}{dt} = \Lambda_y + (\lambda_1 - \lambda_3)k \quad . \quad (40;5)$$

Эти уравненія послужатъ для опредѣленія величинъ реакцій связей, послѣднее же уравненіе:

$$C_{ю}\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} = \Lambda_z \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

есть дифференціальное уравненіе вращенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной постоянной оси.

Опредѣлимъ законъ вращенія какого либо твердаго тѣла вокругъ горизонтальной постоянной оси подъ вліяніемъ силы тяжести.

Предположимъ, что за начало координатъ взята точка пересѣченія горизонтальной оси Z-овъ съ тою вертикальною плоскостью, въ которой остается, при вращеніи, центръ инерціи тѣла; ось $У$-овъ опустимъ вертикально внизъ. Моментъ силъ тяжести всѣхъ частей тѣла вокругъ оси Z-овъ выразится въ такомъ случаѣ такъ: $+Mgx_c = +Mg\xi_c \cos\vartheta$, а потому дифференціальное уравненіе вращенія будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$C_w \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = Mg\xi_c \cos\vartheta.$$

Первый интегралъ этого дифференціальнаго уравненія, т. е.:

$$\frac{1}{2} C_w (\vartheta')^2 = Mg\xi_c \sin\vartheta + h$$

выражаетъ законъ живой силы, который въ настоящемъ случаѣ имѣетъ мѣсто, такъ какъ сила тяжести имѣетъ потенціалъ, а въ уравненіи связей время не входитъ явнымъ образомъ.

Введя вмѣсто h начальныя значенія ϑ_0 и ϑ'_0 угла ϑ и угловой скорости ϑ', дадимъ предыдущему уравненію слѣдующій видъ:

$$\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = (\vartheta'_0)^2 + \frac{2g}{l}(\sin\vartheta - \sin\vartheta_0), \quad \ldots \quad (42)$$

гдѣ:

$$l = \frac{C_w}{M\xi_c}; \quad \ldots \quad (43)$$

сравнивъ его съ уравненіемъ:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = (\varphi'_0)^2 + \frac{2g}{R}(\cos\varphi - \cos\varphi_0),$$

выражающимъ законъ живой силы въ движеніи простого кругового математическаго маятника, мы увидимъ, что если въ первомъ (т. е. въ (42)) замѣнить уголъ ϑ угломъ $\frac{\pi}{2} - \varphi$, а величину l длиною R, то получимъ послѣднее уравненіе; при этомъ слѣдуетъ замѣтить, что l имѣетъ измѣренія длины, такъ какъ это есть отношеніе момента инерціи къ произведенію изъ массы на длину.

На этомъ основаніи мы можемъ составить себѣ слѣдующее понятіе о законѣ вращенія твердаго тѣла вокругъ горизонтальной оси подъ вліяніемъ силы тяжести:

Если отложимъ отъ начала координатъ по оси Ξ *длину* l (43), *то точка* Ц *твердаго тѣла, находящаяся на концѣ этой длины, будетъ совершать то же самое движеніе, какое совершаетъ тяжелая точка кругового математическаго маятника длины* l *при начальномъ углѣ отклоненія* φ_0 *отъ оси У-овъ и при начальной скорости* v_0, *равной* $l\vartheta'_0$.

Твердое тѣло, находящееся въ тѣхъ условіяхъ, при которыхъ мы разсматриваемъ его движеніе въ настоящемъ примѣрѣ, т. е. имѣющее возможность свободно вращаться вокругъ горизонтальной оси, не проходящей черезъ центръ инерціи, и подверженное дѣйствію силы тяжести, называется *физическимъ маятникомъ*. Длина l называется *приведенною длиною физическаго маятника* или *длиною маятника математическаго, эквивалентнаго данному физическому маятнику*; точка Ц называется *центромъ качаній*, соотвѣтствующимъ данной оси привѣса, т. е. оси вращенія тѣла; линія, проведенная черезъ центръ качанія параллельно оси привѣса, называется *осью качаній*, соотвѣтствующею оси привѣса.

Разстояніе l оси качанія отъ оси привѣса выражается формулою (43), которую можно представить въ иномъ видѣ; выразимъ моментъ инерціи $C_{\text{ю}}$ вокругъ оси качанія по формулѣ (34) § 12, тогда получимъ:

$$l = \frac{C_c}{M\xi_c} + \xi_c ,$$

гдѣ C_c есть моментъ инерціи физическаго маятника вокругъ оси, параллельной оси качаній и проведенной черезъ центръ инерціи. Изъ этой формулы, во первыхъ, видно, что длина l болѣе ξ_c, т. е., что центръ качаній отстоитъ отъ оси привѣса далѣе, чѣмъ центръ инерціи; во вторыхъ, на основаніи этой формулы можно заключить, что ось привѣса и ось качаній взаимны, такъ что, если маятникъ будетъ подвѣшенъ за ось качаній, то новою осью качаній станетъ прежняя ось привѣса; въ самомъ дѣлѣ, разстояніе новой оси качаній отъ новой оси привѣса будетъ слѣдующее:

$$l_1 = \frac{C_c}{M(l - \xi_c)} + (l - \xi_c);$$

но такъ какъ

$$l - \xi_c = \frac{C_c}{M\xi_c},$$

то окажется, что

$$l_1 = \xi_c + \frac{C_c}{M\xi_c} = l.$$

При ничтожно-малыхъ углахъ отклоненія маятника отъ положенія равновѣсія продолжительность одного полнаго качанія будетъ:

$$\pi \sqrt{\frac{C_{ю}}{M\xi_c g}}.$$

§ 15. Условія, при которыхъ ось твердаго тѣла можетъ быть свободною постоянною осью вращенія.

Такъ какъ давленія равны и противоположны реакціямъ, то отрицательно взятое λ_5 выражаетъ давленіе тѣла на опору, препятствующую точкѣ *Ю* скользить вдоль по оси *Z*-овъ, далѣе λ_1 и λ_2, взятыя съ отрицательными знаками, суть проэкціи на оси *X*-овъ и *У*-овъ давленія вращающагося тѣла на опору точки K_1, а взятыя съ отрицательными знаками λ_3 и λ_4 суть проэкціи на оси *X*-овъ и *У*-овъ давленія тѣла на опоры точки K_2.

Если твердое тѣло вращается подъ вліяніемъ пары силъ, ось которой параллельна оси *Z*-овъ, то B_x, B_y, B_z, $(Л_0)_x$, $(Л_0)_y$ равны нулю, угловое ускореніе опредѣлится изъ уравненія (41), давленіе $(-\lambda_5)$ равно нулю, а давленія на опоры точекъ K_1 и K_2 опредѣлятся изъ равенствъ:

$$-\lambda_1 - \lambda_3 = M\xi_c\left[(\vartheta')^2\cos\vartheta + \vartheta''\sin\vartheta\right],$$

$$-\lambda_2 - \lambda_4 = M\xi_c\left[(\vartheta')^2\sin\vartheta - \vartheta''\cos\vartheta\right],$$

$$(\lambda_2 - \lambda_4)k = E_{ю}\frac{d(\vartheta'\cos\vartheta)}{dt} - D_{ю}\frac{d(\vartheta'\sin\vartheta)}{dt},$$

$$(\lambda_3 - \lambda_1)k = E_{ю}\frac{d(\vartheta'\sin\vartheta)}{dt} + D_{ю}\frac{d(\vartheta'\cos\vartheta)}{dt}.$$

Для того, чтобы давленія на опоры были равны нулю при всѣхъ положеніяхъ вращающагося тѣла, т. е. при всѣхъ величинахъ угла ϑ, необходимо, чтобы постоянныя ξ_c, $D_{ю}$ и $E_{ю}$ были равны нулю.

Изъ вышеизложеннаго видно, что *если твердое тѣло вращается*

вокругъ постоянной оси подъ вліяніемъ такихъ силъ, главный векторъ которыхъ равенъ нулю, а главный моментъ (вокругъ *Ю) направленъ по этой оси, то оно не производитъ никакихъ давленій на точки опоры этой оси только при соблюденіи слѣдующихъ условій относительно положенія ея въ тѣлѣ*;

1) ξ_c *должно быть равно нулю, т. е. центръ инерціи тѣла долженъ быть на оси вращенія,*

2) $D_{ю}$ *и* $E_{ю}$ *должны быть равны нулю, т. е. ось вращенія должна быть одною изъ главныхъ осей инерціи тѣла.*

При этихъ условіяхъ ось вращенія можетъ быть свободною, такъ что точки опоры нужны только на случай появленія такихъ постороннихъ силъ, которыя будутъ стремиться вывести ось вращенія изъ первоначальнаго положенія.

Если центръ инерціи тѣла не находится на оси вращенія, то при вращеніи является центробѣжная сила, стремящаяся сорвать ось съ подшипниковъ въ сторону положенія центра инерціи; кромѣ того, если вращеніе не равномѣрно, то является еще давленіе противоположное вращательной части ускоренія центра инерціи.

Если только соблюдено первое условіе ($\xi_c = 0$), но не соблюдено второе (т. е. $D_{ю}$ и $E_{ю}$ не равны нулю), то вращающееся тѣло стремится повернуться вокругъ нѣкоторой оси, перпендикулярной къ постоянной оси, и давленія, производимыя на точки опоры тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе величины $D_{ю}$ и $E_{ю}$.

§ 16. Дифференціальныя уравненія движенія несвободнаго твердаго тѣла, движущагося параллельно неподвижной плоскости.

Въ параграфѣ 7-мъ были составлены дифференціальныя уравненія движенія свободнаго твердаго тѣла, движущагося параллельно неподвижной плоскости. Теперь мы выведемъ дифференціальныя уравненія того же рода движенія твердаго тѣла, когда оно ограничено одною или двумя удерживающими связями. Эти связи выражаются уравненіями, связывающими координаты x_c, y_c центра инерціи и уголъ ϑ, или координаты $x_{ю}$, $y_{ю}$ и уголъ ϑ.

Исходя изъ равенства, выражающаго начало виртуальныхъ отклоненій, выведемъ вышесказанныя дифференціальныя уравненія движенія, причемъ для большей общности будемъ вести выводъ такъ, чтобы въ третьемъ уравненіи получилась производная отъ глав-

наго момента количествъ движеній вокругъ точки *Ю*. Уравненія связей пусть будутъ:

$$\varphi_1(x_ю, y_ю, э) = 0$$
$$\varphi_2(x_ю, y_ю, э) = 0.$$

Равенство, выражающее, что сумма виртуальныхъ работъ потерянныхъ силъ твердаго тѣла или неизмѣняемой системы равна нулю, будетъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} [(X_i - m_i x_i'')\ \delta x_i + (Y_i - m_i y_i'')\ \delta y_i] = 0 \quad . . (44)$$

Замѣнимъ въ немъ варіаціи δx_i и δy_i ихъ выраженіями (2) § 1-го:

$$\left.\begin{aligned} \delta x_i &= \delta x_ю - (y_i - y_ю)\ \delta э \\ \delta y_i &= \delta y_ю + (x_i - x_ю)\ \delta э \end{aligned}\right\} . . . . . (2)$$

Варіаціи $\delta x_ю$, $\delta y_ю$, $\delta э$ не независимы, но связаны между собою равенствами:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_ю}\delta x_ю + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_ю}\delta y_ю + \frac{\partial \varphi_1}{\partial э}\delta э &= 0 \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_ю}\delta x_ю + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_ю}\delta y_ю + \frac{\partial \varphi_2}{\partial э}\delta э &= 0 \end{aligned}\right\} . . . . . (45)$$

Равенство (44) по подстановленіи въ него вмѣсто варіаціи δx_i и δy_i изъ выраженій (2), получитъ видъ:

$$\delta x_ю \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - m_i x_i'') + \delta y_ю \sum_{i=1}^{i=n} (Y_i - m_i y_i'') +$$
$$+ \delta э \sum_{i=1}^{i=n} [(x_i - x_ю)(Y_i - m_i y_i'') - (y_i - y_ю)(X_i - m_i x_i'')] = 0. \quad (46)$$

Здѣсь входятъ слѣдующія суммы:

$$\sum_{i=1}^{i=n} X_i = B_x, \quad \sum_{i=1}^{i=n} Y_i = B_y,$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i x_i'' = M x_c'', \quad \sum_{i=1}^{i=n} m_i y_i'' = M y_c'',$$
$$\sum_{i=1}^{i=n} [(x_i - x_ю)\ Y_i - (y_i - y_ю)\ X] = Л_ю$$

и, кромѣ того еще одна сумма, въ которой сдѣлаемъ слѣдующее преобразованіе:

$$(x_i - x_{ю})\,y''_i - (y_i - y_{ю})\,x_i'' = \frac{d}{dt}\left[(x_i - x_{ю})\,y_i' - (y_i - y_{ю})\,x_i'\right] -$$
$$-(x_i' - x_{ю}')\,y_i' + (y_i' - y_{ю}')\,x_i',$$

вслѣдствіе чего эта сумма выразится такъ:

$$\sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[(x_i - x_{ю})\,y_i'' - (y_i - y_{ю})\,x_i''\right] = \frac{d\lambda_{ю}}{dt} - M(x_c'\,y_{ю}' - y_c'\,x_{ю}'),$$

гдѣ $(\lambda_{ю})$ означаетъ моментъ количествъ движенія твердаго тѣла, движущагося параллельно неподвижной плоскости $XУ$, вокругъ оси Z.

$$\lambda_{ю} = \sum_{i=1}^{i=n} m_i\left[(x_i - x_{ю})\,y_i' - (y_i - y_{ю})\,x_i'\right].$$

Такимъ образомъ равенство (46) будетъ имѣть слѣдующій видъ:

$$\delta x_{ю}\,(B_x - Mx_c'') + \delta y_{ю}\,(B_y - My_c'') +$$
$$+\,\delta э\left(Л_{ю} - \frac{d\lambda_{ю}}{dt} + M\,(x_c'\,y_{ю}' - y_c'\,x_{ю}')\right) = 0.$$

Варіаціи $\delta x_{ю}$, $\delta y_{ю}$, $\delta э$, какъ уже сказано выше, не независимы, но связаны между собою равенствами (45); помноживъ эти равенства на множителей λ_1, λ_2, придавъ ихъ къ первой части предыдущаго равенства и приравнявъ коэффиціенты у варіацій $\delta x_{ю}$, $\delta y_{ю}$, $\delta э$ нулю, получимъ слѣдующія три дифференціальныя уравненія движенія твердаго тѣла, движущагося параллельно плоскости $XУ$ и ограниченнаго въ своемъ движеніи двумя удерживающими связями:

$$Mx_c'' = B_x + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{ю}} + \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{ю}} \quad . \quad . \quad . \quad (47;\ 1)$$

$$My_c'' = B_y + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_{ю}} + \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_{ю}} \quad . \quad . \quad . \quad (47;\ 2)$$

$$\frac{d\lambda_{ю}}{dt} = M(x_c'\,y_{ю}' - y_c'\,x_{ю}') + Л_{ю} + \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial э} + \lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial э} \quad . \quad . \quad (47;\ 3)$$

Изъ этихъ уравненій между прочимъ видно, что произведенія:

$$\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{ю}},\quad \lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_{ю}}$$

суть проэкціи *главнаго вектора реакціи первой связи* на оси координатъ X и Y и что произведеніе:

$$\lambda_1 \frac{d\varphi_1}{d\vartheta}$$

есть *главный моментъ этихъ реакцій вокругъ точки Ю*; подобныя же значенія имѣютъ члены, заключающіе множитель λ_2 и относящіеся къ реакціямъ второй связи.

Добавочные члены въ дифференціальномъ уравненіи (47; 3), заключающіе y_{ω}' и x_{ω}', взаимно сократятся, если за точку *Ю* будетъ взятъ центръ инерціи тѣла, и обратятся въ нуль, когда эта точка *Ю* будетъ неподвижна.

§ 17. Разложеніе живой силы твердаго тѣла на сумму двухъ частей.

Въ § 8-мъ было составлено выраженіе (27) живой силы T твердаго тѣла.

Выраженіе это принимаетъ болѣе простой видъ, если за точку *Ю* возьмемъ центръ инерціи C тѣла, а за оси Ξ, Υ, Z главныя центральныя оси инерціи. Въ самомъ дѣлѣ тогда:

$$T = \frac{M}{2} w_c^2 + \frac{1}{2}(\mathfrak{A}_c p^2 + \mathfrak{B}_c q^2 + \mathfrak{C}_c r^2).$$

Означимъ черезъ λ, μ, ν косинусы угловъ, составляемыхъ мгновенною осью съ главными центральными осями инерціи, тогда: $p = \Omega\lambda$, $q = \Omega\mu$, $r = \Omega\nu$, а по формулѣ (33) § 11-го:

$$(I_\Omega)_c = \mathfrak{A}_c\lambda^2 + \mathfrak{B}_c\mu^2 + \mathfrak{C}_c\nu^2,$$

поэтому

$$T = \frac{1}{2} M w_c^2 + \frac{1}{2}(I_\Omega)_c \Omega^2, \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

гдѣ величина, помноженная на квадратъ угловой скорости, есть моментъ инерціи твердаго тѣла вокругъ мгновенной оси вращенія, проведенной черезъ центръ инерціи.

Такимъ образомъ, *если твердое тѣло совершаетъ какое бы то ни было движеніе, то живую силу его можно разсматривать какъ сумму двухъ величинъ: 1) живой силы поступательнаго движенія, общаго съ движеніемъ центра инерціи и 2) живой силы враща-*

тельнаго движенія вокругъ этого центра; послѣдняя выражается половиною произведенія момента инерціи тѣла вокругъ мгновенной оси, проведенной черезъ инерціи, на квадратъ угловой скорости.

§ 18. Элементарная работа всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Движеніе, совершаемое твердымъ тѣломъ въ теченіи безконечно-малаго времени dt, можетъ быть разложено на вращательное движеніе вокругъ какого либо полюса $Ю$ и на поступательное движеніе, общее съ этимъ полюсомъ.

Проэкціи на оси X-овъ, $У$-овъ, Z-овъ перемѣщенія, совершаемаго какою либо точкою твердаго тѣла, могутъ быть выражены какъ показано въ параграфѣ 4-мъ, такъ:

$$\left.\begin{aligned} dx &= dx_{ю} + (z - z_{ю})\,Q dt - (y - y_{ю})\,R dt \\ dy &= dy_{ю} + (x - x_{ю})\,R dt - (z - z_{ю})\,P dt \\ dz &= dz_{ю} + (y - y_{ю})\,P dt - (x - x_{ю})\,Q dt \end{aligned}\right\} . \quad (10)$$

Поэтому, сумма элементарныхъ работъ всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу:

$$\sum (X dx + У dy + Z z d),$$

можетъ быть представлена подъ слѣдующимъ видомъ:

$$B_x dx_{ю} + B_y dy_{ю} + B_z dz_{ю} + (Л_{ю})_x\, P dt + (Л_{ю})_y\, Q dt + \\ + (Л_{ю})_z\, R dt = B ds_{ю} \cos(B, ds_{ю}) + Л_{ю} \cos(Л_{ю}, \Omega)\, \Omega dt,$$

гдѣ $ds_{ю}$ выражаетъ величину и направленіе перемѣщенія точки $Ю$, принадлежащей твердому тѣлу.

Если бы твердое тѣло совершало поступательное движеніе и при томъ то самое, какое совершаетъ точка $Ю$, то работа всѣхъ задаваемыхъ силъ равнялись бы:

$$B ds_{ю} \cos(B, ds_{ю}); \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

а еслибы твердое тѣло совершало вращательное движеніе вокругъ неподвижной точки $Ю$ съ тою же угловою скоростью, какую оно имѣетъ въ полномъ движеніи, то работа всѣхъ задаваемыхъ силъ

равнялась бы:

$$Л_ю \cos (Л_ю, \Omega)\, \Omega dt \ldots\ldots\ldots (50)$$

Въ полномъ движеніи тѣла элементарная работа задаваемыхъ силъ равна суммѣ работъ (49) и (50); поэтому можно сказать, что *сумма элементарныхъ работъ всѣхъ задаваемыхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, можетъ быть разложена на двѣ части: на работу, совершаемую ими въ поступательномъ движеніи тѣла, общемъ съ движеніемъ полюса Ю, и на работу, совершаемую ими во вращательномъ движеніи тѣла вокругъ этого полюса.*

Такъ какъ разложенія одного и того же движенія тѣла на части поступательную и вращательную многообразны до безконечности, то столь же многообразны и разложенія на двѣ части элементарной работы силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Во всякомъ случаѣ, элементарная работа силъ въ поступательной части перемѣщенія твердаго тѣла равняется произведенію изъ перемѣщенія полюса на величину проэкціи главнаго вектора силъ на направленіе этого перемѣщенія.

Элементарная же работа силъ во вращательной части перемѣщенія твердаго тѣла равняется произведенію изъ *углового перемѣщенія* Ωdt на величину проэкціи главнаго момента силъ (вокругъ полюса) на направленіе мгновенной оси.

Въ выраженіи:

$$Л_ю \cos (Л_ю \Omega)\, \Omega\, dt = P dt\, (Л_ю)_x + Q dt\, (Л_ю)_y + R dt\, (Л_ю)_z$$

замѣнимъ величины P, Q, R ихъ выраженіями (7) параграфа 4-го и примемъ во вниманіе, что

$$(Л_ю)_x \cos (\mathrm{Z}\, X) + (Л_ю)_y \cos (\mathrm{Z}\, У) + (Л_ю)_z \cos (\mathrm{Z}\, Z) =$$
$$= Л_ю \cos (Л_ю\, \mathrm{Z}) = (Л_ю)_\varsigma$$

$$(Л_ю)_x \cos (N\, X) + (Л_ю)_y \cos (N\, У) = Л_ю \cos (Л_ю\, N),$$

(такъ какъ $\cos (NZ) = 0$), то предыдущее выраженіе приметъ такой видъ:

$$Л_ю \cos (Л_ю\, \Omega)\, \Omega\, dt = (Л_ю)_\varsigma\, d\vartheta +$$
$$+ Л_ю \cos (Л_ю\, N)\, d\varphi + (Л_ю)_z\, d\psi \ldots\ldots (51)$$

§ 19. Главный векторъ и главный моментъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу и имѣющихъ потенціалъ.

Если задаваемыя силы, приложенныя къ точкамъ твердаго тѣла, имѣютъ потенціалъ, такъ что сумма:

$$\sum_{i=1}^{i=n}(X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i)$$

есть полный дифференціалъ нѣкоторой функціи

$$U(x_1, y_1, z_1, \ldots x_i, y_i, z_i, \ldots x_n, y_n, z_n)$$

отъ координатъ точекъ приложенія, то, замѣнивъ эти координаты ихъ выраженіями по формуламъ (4) § 2-го, получимъ U въ видѣ нѣкоторой функціи отъ $x_ю$, $y_ю$, $z_ю$, $ф$, $ж$, $э$,. Полный дефференціалъ этой функціи выразится шестичленомъ:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_ю} dx_ю + \frac{\partial U}{\partial y_ю} dy_ю + \frac{\partial U}{\partial z_ю} dz_ю +$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial э} dэ + \frac{\partial U}{\partial ф} dф + \frac{\partial U}{\partial ж} dж.$$

Такъ выразится вышеприведенная сумма; съ другой стороны та же сумма выражается, какъ слѣдуетъ изъ предыдущаго параграфа и формулы (51) слѣдующимъ шестичленомъ:

$$B_x dx_ю + B_y dy_ю + B_z dz_ю +$$
$$+ (Л_ю)_ς dэ + Л_ю \cos(Л_ю N) dф + (Л_ю)_z dж.$$

Такъ какъ оба эти выраженія должны быть справедливы для всякихъ безконечно-малыхъ величинъ $dx_ю$, $dy_ю$, $dz_ю$, $dэ$, $dф$, $dж$, положительныхъ или отрицательныхъ, то изъ сравненія ихъ заключимъ, что проэкціи главнаго вектора совокупности силъ, имѣющихъ потенціалъ, выразятся частными производными:

$$B_x = \frac{\partial U}{\partial x_ю}, \quad B_y = \frac{\partial U}{\partial y_ю}, \quad B_z = \frac{\partial U}{\partial z_ю},$$

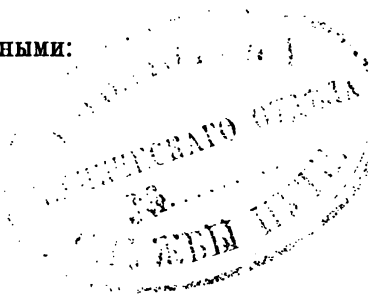
а проэкціи на оси Z, N и Z' главнаго момента этихъ силъ во-

кругъ точки $Ю$ выразятся частными производными:

$$Л_ю \cos(Л_ю Z) = \frac{\partial U}{\partial э},$$

$$Л_ю \cos(Л_ю N) = \frac{\partial U}{\partial ф},$$

$$Л_ю \cos(Л_ю Z) = \frac{\partial U}{\partial ж}.$$



§ 20. Законъ сохраненія полной энергіи.

Въ томъ случаѣ, когда совокупность силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, имѣетъ потенціалъ, а уравненія связей не заключаютъ времени явнымъ образомъ, движеніе твердаго тѣла удовлетворяетъ интегралу:

$$T - U = h, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

выражающему законъ сохраненія полной энергіи тѣла.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда потенціальная функція можетъ быть разложена на сумму двухъ частей, одна изъ которыхъ есть функція только координатъ x_c, y_c, z_c центра инерціи, а другая — функція только угловъ $ф$, $ж$, $э$, и притомъ, когда главный векторъ реакцій связей равенъ нулю, тогда интегралъ (52) можетъ быть замѣненъ двумя интегралами. Возьмемъ центръ инерціи за точку $Ю$, тогда, какъ показано въ § 17 [формула (48)]:

$$T = \frac{M}{2}(v_c)^2 + \frac{1}{2}(J_\Omega)_c \, \Omega^2.$$

Мы предположили, что

$$U = V_1(x_c, y_c, z_c) + V_2(ф, ж, э).$$

Помноживъ дифференціальныя уравненія движенія центра инерціи:

$$M x_c'' = \frac{\partial V_1}{\partial x_c}$$

$$M y_c'' = \frac{\partial V_1}{\partial y_c}$$

$$M z_c'' = \frac{\partial V_1}{\partial z_c}$$

соотвѣтственно на x_c', y_c', z_c' и сложивъ, получимъ дифференціаль-

ное уравненіе:

$$\frac{M}{2}\frac{dv_c^2}{dt}=\frac{dV_1}{dt},$$

интегралъ котораго

$$\frac{M}{2}v_c^2=V_1+h_1 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

выражаетъ законъ сохраненія энергіи въ движеніи центра инерціи.

Вычтя изъ равенства:

$$T=V_1+V_2+h$$

равенство (53) получимъ равенство:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{A}_c p^2+\mathfrak{B}_c q^2+\mathfrak{C}_c r^2)=V_2(\phi, \psi, \vartheta)+h-h_1,$$

выражающее законъ сохраненія энергіи во вращательномъ движеніи тѣла вокругъ центра инерціи.

§ 21. Дифференціальныя уравненія Эйлера для вращательнаго движенія твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки или вокругъ центра инерціи.

Въ § 6-мъ были выведены дифференціальныя уравненія (13) главнаго момента количествъ движенія твердаго тѣла вокругъ начала координатъ или какой либо неподвижной точки и подобныя же уравненія (17) главнаго момента количествъ движенія вокругъ центра инерціи, будетъ ли онъ имѣть движеніе, или остается неподвижнымъ.

Заключающіяся въ этихъ уравненіяхъ проэкціи главнаго момента количествъ движенія на неподвижныя оси координатъ суть выраженія сложныя; онѣ выражаются по формуламъ (22) § 8 въ косинусахъ $\lambda_x, \mu_x, \ldots\ldots \nu_z$ и проэкціяхъ главнаго момента количествъ движенія на оси Ξ, Υ, Z.

Эти послѣднія проэкціи, т. е. $(л_ю)\xi$, $(л_ю)\eta$, $(л_ю)\zeta$ выражаются формулами (23) § 8-го, которыя *принимаютъ простой видъ, если точка Ю неподвижна, или совпадаетъ съ центромъ инерціи и когда за оси* Ξ, Υ, Z *взяты главныя оси инерціи.*

Въ самомъ дѣлѣ, если точка *Ю* неподвижна, то $\alpha_ю$, $\beta_ю$, $\gamma_ю$ равны нулю, если же за точку *Ю* взятъ центръ инерціи, то ξ_c, η_c, ζ_c равны нулю, если за оси Ξ, Υ, Z взяты главныя оси инерціи, то

D, E и F равны нулю; поэтому, если точка $Ю$ неподвижна и за оси $Ю\Xi$, $Ю\Upsilon$, $Ю Z$ взяты главныя оси инерціи, то

$$(л_ю)\xi = \mathfrak{A}_ю p, \quad (л_ю)_\eta = \mathfrak{B}_ю q, \quad (л_ю)\zeta = \mathfrak{C}_ю r, \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

а если разсматривается вращеніе вокругъ центра инерціи C, который можетъ имѣть какое бы то ни было движеніе и за оси $C\Xi$, $C\Upsilon$, CZ взяты главныя центральныя оси инерціи, то:

$$(л_c)\xi = \mathfrak{A}_c p, \quad (л_c)_\eta = \mathfrak{B}_c q, \quad (л_c)\zeta = \mathfrak{C}_c r \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

Можно получить дифференціальныя уравненія вращенія заключающія въ себѣ производныя отъ $(л)\xi$, $(л)_\eta$, $(л)\zeta$. Такъ какъ выводъ этихъ уравненій относится одинаково и къ тѣмъ случаямъ, когда точка $Ю$ неподвижна, и къ тѣмъ случаямъ, когда за точку $Ю$ взятъ центръ инерціи C, то въ этомъ выводѣ индексы $Ю$ и C не будутъ поставлены.

Такъ какъ $(л_ю)\xi$ и $(Л_ю)\xi$, то есть проэкціи главнаго момента количества движенія и главнаго момента силъ вокругъ $Ю$ на ось Ξ, могутъ быть выражены такимъ образомъ:

$$(л_ю)\xi = (л_ю)_x \lambda_x + (л_ю)_y \lambda_y + (л_ю)_z \lambda_z$$

$$(Л_ю)\xi = (Л_ю)_x \lambda_x + (л_ю)_y \lambda_y + (л_ю)_z \lambda_z,$$

то, помноживъ первое изъ уравненій (13) на λ_x, второе — на λ_y, третье—на λ_z (или же уравненія (17) на тѣ же косинусы) и сложивъ, получимъ:

$$\lambda_x \frac{d(л)_x}{dt} + \lambda_y \frac{d(л)_y}{dt} + \lambda_z \frac{d(л)_z}{dt} = (Л)\xi$$

или, что то же самое:

$$\frac{d(л)\xi}{dt} - \left((л)_x \frac{d\lambda_x}{dt} + (л)_y \frac{d\lambda_y}{dt} + (л)_z \frac{d\lambda_z}{dt} \right) = (Л)\xi .$$

Возьмемъ точку A на оси Ξ въ разстояніи равномъ единицѣ длины отъ точки $Ю$ или C; проэкціи на неподвижныя оси радіуса вектора $ЮA$ будутъ: $x_A - x_ю = \lambda_x$, $y_A - y_ю = \lambda_y$, $z_A - z_ю = \lambda_z$, потому что относительныя координаты точки A суть $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$. Поэтому производныя отъ λ_x, λ_y, λ_z суть проэкціи на непо-

движныя оси вращательной скорости v_A точки A и

$$(л)_x \frac{d\lambda_x}{dt} + (л)_y \frac{d\lambda_y}{dt} + (л)_z \frac{d\lambda_z}{dt} =$$

$$л\cos(лX)v_A\cos(v_AX)+л\cos(лY)v_A\cos(v_AY)+л\cos(лZ)v_A\cos(v_AZ)=$$

$$= л\,v_A\cos(л\,v_A).$$

Съ другой стороны оси Ξ, Υ, Z суть также взаимно перпендикулярныя оси, поэтому:

$$л\,v_A\cos(л\,v_A) = (л)_\xi\,v_A\cos(v_A\Xi) + (л)_\eta\,v_A\cos(v_A\Upsilon) + (л)_\zeta\,v_A\cos(v_AZ);$$

но v_A есть вращательная скорость точки, имѣющей координаты $\xi = 1$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, поэтому

$$v_A\cos(v_A\Xi) = 0,\quad v_A\cos(v_A\Upsilon) = r;\quad v_A\cos(v_AZ) = -q,$$

слѣдовательно

$$л\,v_A\cos(л\,v_A) = r(л)_\eta - q(л)_\zeta = r\mathfrak{B}q - q\mathfrak{C}r.$$

Такимъ образомъ получаемъ:

$$\mathfrak{A}\frac{dp}{dt} = (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\,qr + (Л)_\xi \quad . \quad . \quad . \quad (56;1)$$

и подобнымъ же образомъ получимъ два другія дифференціальныя уравненія:

$$\mathfrak{B}\frac{dq}{dt} = (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,rp + (Л)_\eta \quad . \quad . \quad . \quad (56;2)$$

$$\mathfrak{C}\frac{dr}{dt} = (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,pq + (Л)_\zeta \quad . \quad . \quad . \quad (56;3)$$

Уравненія эти называются уравненіями Эйлера.

§ 22. Вращеніе твердаго тѣла по инерціи.

Вращеніе твердаго тѣла вокругъ неподвижной точки или центра инерціи, при которомъ главный моментъ силъ (вокругъ этой точки) равенъ нулю, называется *вращеніемъ твердаго тѣла по инерціи.*

При такомъ вращеніи вторыя части дифференціальныхъ уравненій (13) или (17) § 6-го равны нулю, поэтому имѣютъ мѣсто три интеграла площадей:

$$(л)_x = C_1,\quad (л)_y = C_2,\quad (л)_z = C_3 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

выражающіе, что главный моментъ количествъ вращательнаго движенія твердаго тѣла сохраняетъ постоянную величину

$$G = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}$$

и постоянное направленіе. Плоскость, проведенная черезъ ту точку, вокругъ которой тѣло вращается, и перпендикулярная къ направленію главнаго момента количествъ движенія есть *неизмѣняемая плоскость*.

Расположимъ неподвижныя оси такимъ образомъ, чтобы неизмѣняемая плоскость была параллельна плоскости XY и чтобы главный моментъ количества движенія былъ направленъ параллельно положительной оси Z-овъ.

Тогда проэкціи его на направленія главныхъ осей инерціи могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ:

$$(л)_\xi = G\lambda_x = -G \sin \varphi \cos \vartheta; \quad (л)_\eta = G\mu_x = G \sin \varphi \sin \vartheta;$$
$$(л)_\zeta = G\nu_x = G \cos \varphi;$$

съ другой же стороны, на основаніи (54) и (55) предыдущаго параграфа $(л)_\xi = \mathfrak{A}p$, $(л)_\eta = \mathfrak{B}q$; $(л)_\zeta = \mathfrak{C}r$, поэтому:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}p &= -G \sin \varphi \cos \vartheta \\ \mathfrak{B}q &= G \sin \varphi \sin \vartheta \\ \mathfrak{C}r &= G \cos \varphi. \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (57)$$

Такъ какъ $л^2 = G^2$, то:

$$\mathfrak{A}^2p^2 + \mathfrak{B}^2q^2 + \mathfrak{C}^2r^2 = G^2 \quad \ldots\ldots\ldots (58)$$

Возьмемъ теперь уравненія Эйлера, помножимъ первое на p, второе—на q, третье—па r и сложимъ; получимъ

$$\mathfrak{A}p\frac{dp}{dt} + \mathfrak{B}q\frac{dq}{dt} + \mathfrak{C}r\frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда слѣдуетъ:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2) = h, \quad \ldots\ldots\ldots (59)$$

т. е. живая сила вращательнаго движенія постоянна.

Основываясь на полученныхъ четырехъ интегралахъ, можно со-

ставить себѣ геометрическое представленіе о вращеніи твердаго тѣла по инерціи.

Опишемъ въ тѣлѣ тотъ эллипсоидъ инерціи, уравненіе котораго:

$$\mathfrak{A}\xi^2 + \mathfrak{B}\eta^2 + \mathfrak{C}\zeta^2 = 2hk^2, \quad \ldots\ldots (60)$$

гдѣ h есть величина живой силы вращенія, k есть отношеніе единицы длины къ единицѣ угловой скорости.

Проведемъ направленіе мгновенной оси и найдемъ точку пересѣченія ея съ поверхностью эллипсоида. Пусть ξ_0, η_0, ζ_0 координаты этой точки, ρ_0 величина радіуса вектора ея, проведеннаго изъ центра эллипсоида. Такъ какъ векторъ ρ_0 имѣетъ направленіе угловой скорости Ω, то проэкціи его на оси Ξ, Υ, Z (т. е. координаты ξ_0, η_0, ζ_0) должны быть пропорціональны величинамъ проэкцій p, q, r угловой скорости Ω, т. е.:

$$\frac{\xi_0}{p} = \frac{\eta_0}{q} = \frac{\zeta_0}{r} = \frac{\rho_0}{\Omega}, \quad \ldots\ldots (61)$$

откуда

$$\xi_0 = \frac{\rho_0}{\Omega} p, \quad \eta_0 = \frac{\rho_0}{\Omega} q, \quad \zeta_0 = \frac{\rho_0}{\Omega} r \ldots (61,\text{bis})$$

Эти координаты должны удовлетворять уравненію (60); подставивъ въ него вмѣсто нихъ выраженія (61, bis), получимъ:

$$\frac{\rho_0^2}{\Omega^2}(\mathfrak{A}p^2 + \mathfrak{B}q^2 + \mathfrak{C}r^2) = 2hk^2,$$

или, на основаніи (59): $\rho_0^2 = \Omega^2 k^2$, $\rho_0 = \Omega k$. Поэтому изъ (61, bis): $\xi_0 = kp$, $\eta_0 = kq$, $\zeta_0 = kr$.

Проведемъ теперь плоскость, касательную къ эллипсоиду (60) въ точкѣ ξ_0, η_0, ζ_0; уравненіе этой плоскости:

$$\mathfrak{A}\Xi\xi_0 + \mathfrak{B}\eta\eta_0 + \mathfrak{C}\zeta\zeta_0 = 2hk^2 \ldots\ldots (62)$$

Косинусы угловъ, составляемыхъ нормалью N къ этой плоскости съ осями Ξ, Υ, Z, будутъ выражаться отношеніями:

$$\cos(N\Xi) = \frac{\mathfrak{A}\xi_0}{\Delta}; \quad \cos(N\Upsilon) = \frac{\mathfrak{B}\eta_0}{\Delta}; \quad \cos(N\mathsf{Z}) = \frac{\mathfrak{C}\zeta_0}{\Delta},$$

гдѣ

$$\Delta = +\sqrt{\mathfrak{A}^2\xi_0^2 + \mathfrak{B}^2\eta_0^2 + \mathfrak{C}_0\zeta_0^2}.$$

Величина разстоянія δ касательной плоскости (62) отъ центра

эллипсоида выразится такъ:

$$\delta = \frac{2hk^2}{\Delta}.$$

Замѣнивъ здѣсь координаты ξ_0, η_0, ζ_0 равными имъ величинами kp, kq, kr, найдемъ, что:

$$\cos(N\Xi) = \frac{\mathfrak{A}p}{\sqrt{\mathfrak{A}^2p^2 + \mathfrak{B}^2q^2 + \mathfrak{C}^2r^2}} = \cos(л\Xi),$$

$$\cos(N\Upsilon) = \cos(л\Upsilon), \quad \cos(N\mathrm{Z}) = \cos(л\mathrm{Z})$$

$$\delta = \frac{2hk}{л} = \frac{2hk}{G}.$$

Это значитъ, что касательная плоскость къ эллипсоиду перпендикулярна къ направленію главнаго момента количествъ движенія, т. е. къ оси Z-овъ и отстоитъ на постоянную длину δ отъ центра эллипсоида. Такъ какъ точка прикосновенія принадлежитъ мгновенной оси, то скорость точки твердаго тѣла, находящейся въ этой точкѣ, равна нулю, т. е. эллипсоидъ инерціи катится безъ скольженія по плоскости, параллельной неизмѣняемой плоскости, отстоящей отъ центра эллипсоида въ постоянномъ разстояніи δ.

Такимъ образомъ получается слѣдующее геометрическое представленіе о вращеніи по инерціи, данное Пуансо:

При вращеніи твердаго тѣла по инерціи вокругъ неподвижной точки или вокругъ центра инерціи эллипсоидъ инерціи катится безъ скольженія по двумъ неподвижнымъ плоскостямъ, параллельнымъ неизмѣняемой плоскости и отстоящимъ отъ нея на разстояніяхъ $2hk : G$ по обѣ стороны.

Кромѣ этого можно еще замѣтить, что проэкція угловой скорости Ω на направленіе $л$ или оси Z-овъ также имѣетъ величину постоянную; въ самомъ дѣлѣ:

$$\Omega\cos(\Omega л) = \frac{\mathfrak{A}p}{G}\cdot p + \frac{\mathfrak{B}q}{G}\cdot q + \frac{\mathfrak{C}r}{G}\cdot r,$$

то есть

$$\Omega\cos(\Omega л) = \frac{2h}{G}.$$

§ 29. Почему главныя оси эллипсоида инерціи называются главными осями инерціи.

Въ частныхъ случаяхъ, когда δ равно большой, средней или меньшей главной полуоси эллипсоида инерціи, вращеніе по инерціи будетъ совершаться вокругъ этой оси съ постоянною угловою скоростью. Это также слѣдуетъ изъ дифференціальныхъ уравненій (56) Эйлера, которыя имѣютъ слѣдующія три частныя рѣшенія:

$$1)\ q = 0,\ r = 0,\ p = \text{постоян.}$$
$$2)\ r = 0,\ p = 0,\ q = \text{постоян.}$$
$$3)\ p = 0,\ q = 0,\ r = \text{постоян.}$$

Эти оси сохраняютъ постоянное положеніе въ тѣлѣ и неизмѣнное направленіе въ пространствѣ. Такъ какъ вращеніе съ постоянною угловою скоростью при постоянствѣ и неизмѣнности направленія угловой скорости возможно только вокругъ этихъ осей, то онѣ и называются главными осями инерціи.

§ 30. Вращеніе по инерціи твердаго тѣла, масса котораго имѣетъ ось симметріи, проходящую черезъ ту точку, вокругъ которой вращеніе совершается.

Когда масса твердаго тѣла имѣетъ ось симметріи и неподвижная точка находится на этой оси, то эллипсоидъ инерціи вокругъ этой точки будетъ эллипсоидомъ вращенія. Пусть $\mathfrak{C}$ есть моментъ инерціи вокругъ оси симметріи, $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ моментъ инерціи вокругъ экваторіальной оси. Третье дифференціальное уравненіе Эйлера обратится въ $\frac{dr}{dt} = 0$ и интегралъ его будетъ $r = C_1$, т. е.

$$ж' \cos \phi + э' = C_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

Третье изъ равенствъ (57) даетъ

$$\cos \phi = \frac{\mathfrak{C} C_1}{G} \quad , \quad . \quad . \quad . \quad , \quad . \quad . \quad (63)$$

т. е. уголъ ϕ имѣетъ постоянную величину; означимъ эту величину черезъ α.

Такъ какъ изъ первыхъ двухъ равенствъ (57):

$$p = -\frac{G \sin \alpha \cos э}{\mathfrak{A}},\ q = \frac{G \sin \alpha \sin э}{\mathfrak{A}},$$

то, подставивъ эти выраженія для p, q въ дифференціальное уравн-

неніе Эйлера (56, 1), получимъ:

$$G \sin\alpha \sin\vartheta \cdot \vartheta' = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} C_1 G \sin\alpha \sin\vartheta .$$

Отсюда

$$\vartheta' = \frac{\mathfrak{A} - \mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} C_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

Означивъ эту постоянную величину черезъ ω_2, получимъ черезъ интегрированіе: $\vartheta = \omega_2 t + C_2$.

Изъ равенства (62), подставивъ вмѣсто $\cos\varphi$ его выраженіе (63) и вмѣсто ϑ' выраженіе (64), получимъ:

$$\varkappa' = \frac{G}{\mathfrak{A}} .$$

Означивъ эту постоянную черезъ ω_1, получимъ интегрированіемъ:

$$\varkappa = \omega_1 t + C_3 .$$

Если расположить оси X' и Ξ такимъ образомъ, чтобы C_2 и C_3 были равны нулю, то вращеніе тѣла по инерціи выразится такъ: $\varphi = \alpha$, $\varkappa = \omega_1 t$, $\vartheta = \omega_2 t$.

Это вращеніе вокругъ неподвижной точки образуется при равномѣрномъ вращеніи тѣла съ угловою скоростью ω_2 вокругъ оси $\mathcal{O}\mathbf{Z}$, которая равномѣрно описываетъ конусъ съ угломъ α при вершинѣ вокругъ оси $\mathcal{O}Z$. Угловая скорость Ω при этомъ имѣетъ постоянную величину, заключается въ плоскости $\mathbf{Z}Z'$ и составляетъ постоянные углы съ этими осями. Оба катящіеся другъ по другу конусы мгновенныхъ осей суть конусы прямые и круговые.

§ 31. Вращеніе по инерціи твердаго тѣла, эллипсоидъ инерціи котораго вокругъ неподвижной точки или центра инерціи есть шаръ.

Въ этомъ случаѣ вторыя части всѣхъ трехъ дифференціальныхъ уравненій Эйлера равны нулю, потому что $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{C}$; поэтому интегралы ихъ будутъ: $p =$ пост., $q =$ пост., $r =$ пост. Слѣдовательно угловая скорость имѣетъ постоянное направленіе въ тѣлѣ и постоянную величину. Взявъ направленіе угловой скорости за ось $\mathbf{Z}$, будемъ имѣть $p = 0$, $q = 0$, $r = C_1$. По формуламъ (57) p и q при всякомъ ϑ могутъ быть равны нулю только при $\varphi = 0$, потому что $G^2 = \mathfrak{C}^2 r^2$ и $G = \mathfrak{C} r$ и стало быть не равно нулю. Изъ всего

этого слѣдуетъ, что тѣло по инерціи вращается вокругъ любой оси его, сохраняющей неизмѣнное направленіе въ пространствѣ и постоянное въ тѣлѣ.

§ 32. Условія равновѣсія силъ, приложенныхъ къ свободному твердому тѣлу.

Въ параграфѣ 6-мъ были составлены дифференціальныя уравненія (12) и (13) движенія свободнаго твердаго тѣла.

Для того, чтобы вся совокупность силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, не могла бы сообщить тѣлу движенія, необходимо, чтобы силы эти удовлетворяли условіямъ, выражаемымъ равенствами:

$$\sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum Z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (65; a)$$

$$\left.\begin{aligned} \sum (yZ - zY) &= 0, \\ \sum (zX - xZ) &= 0, \\ \sum (xY - yX) &= 0, \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65; b)$$

Эти условія выражаютъ: три первыя—что главный векторъ всѣхъ приложенныхъ къ твердому тѣлу силъ долженъ быть равенъ нулю, три вторыя—что главный моментъ ихъ вокругъ начала координатъ долженъ быть равенъ нулю.

При этихъ условіяхъ силы, приложенныя къ точкамъ свободнаго твердаго тѣла *взаимно-уравновѣшиваются черезъ посредство связей, дѣлающихъ неизмѣняемыми разстоянія между точками приложенія силъ.*

Уравненія (65; *a*, *b*) называются уравненіями равновѣсія свободнаго твердаго тѣла.

§ 33. Условіе, при которомъ совокупность силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, уравновѣшивается одною силою.

Пусть къ твердому тѣлу приложена совокупность неуравновѣшивающихся силъ. Положимъ, что главный векторъ ихъ равенъ B, а главный моментъ вокругъ начала координатъ равенъ Λ_0.

Спрашивается, нельзя ли уравновѣсить эту совокупность одною силою? Если это возможно, то къ какой точкѣ твердаго тѣла должно приложить ее, какую дать ей величину и какое направленіе.

Пусть X_1, Y_1, Z_1 суть проэкціи этой силы, F_1 — величина ея и x_1, y_1, z_1—координаты точки приложенія.

Чтобы данная совокупность силъ уравновѣсилась этою силою, необходимо, чтобы были удовлетворены равенства:

$$B_x + X_1 = 0, \ldots\ldots\ldots (66;\ 1)$$

$$B_y + Y_1 = 0, \ldots\ldots\ldots (66;\ 2)$$

$$B_z + Z_1 = 0, \ldots\ldots\ldots (66;\ 3)$$

$$(\Lambda_0)_x + y_1 Z_1 - z_1 Y_1 = 0, \ldots\ldots (66;\ 4)$$

$$(\Lambda_0)_y + z_1 X_1 - x_1 Z_1 = 0, \ldots\ldots (66;\ 5)$$

$$(\Lambda_0)_z + x_1 Y_1 - y_1 X_1 = 0, \ldots\ldots (66;\ 6)$$

Помноживъ три послѣднія равенства соотвѣтственно на X_1, Y_1 Z_1 и сложивъ, получимъ:

$$(\Lambda_0)_x X_1 + (\Lambda_0)_y Y_1 + (\Lambda_0)_z Z_1 = 0,$$

а такъ какъ на основаніи первыхъ трехъ: $X_1 = -B_x$, $Y_1 = -B_y$, $Z_1 = -B_z$, то полученное сейчасъ равенство можно представить такъ:

$$(\Lambda_0)_x B_x + (\Lambda_0)_y B_y + (\Lambda_0)_z B_z = 0 \ldots\ldots (67)$$

или, что тоже самое:

$$\Lambda_0 B \cos(\Lambda_0 B) = 0 \ldots\ldots (67,\ \text{bis})$$

Это есть необходимое условіе для того, чтобы данную совокупность силъ можно было уравновѣсить одною силою; *оно состоитъ въ томъ, чтобы главный моментъ вокругъ начала координатъ и главный векторъ данной совокупности силъ были бы взаимно-перпендикулярны или чтобы главный моментъ былъ равенъ нулю.*

Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ уравновѣшивающая сила должна быть равна и противоположна главному вектору B, какъ видно изъ уравненій (66; 1, 2, 3).

Если $\Lambda_0 = 0$, то изъ уравненій (66; 4, 5, 6) видно, что координаты точки приложенія этой силы должны удовлетворять уравненіямъ:

$$\frac{x_1}{B_x} = \frac{y_1}{B_y} = \frac{z_1}{B_z},$$

которымъ удовлетворяютъ всѣ точки прямой, находящейся на направленіи главнаго вектора, проведеннаго черезъ начало координатъ.

Прежде, чѣмъ перейти къ опредѣленію мѣста приложенія уравновѣшивающей силы при $Л_0$ неравномъ нулю, мы предварительно обратимъ вниманіе на слѣдующее обстоятельство.

Главный моментъ какой либо совокупности силъ вокругъ какой либо точки K, имѣющей координаты x_k, y_k, z_k будетъ имѣть проэкцію на ось X-овъ, равную:

$$(Л_k)_x = \sum [(y - y_k) Z - (z - z_k) Y],$$

откуда

$$(Л_k)_x = (Л_0)_x + z_k B_y - y_k B_z \quad . \quad . \quad . \quad (68;\ 1)$$

и подобнымъ же образомъ окажется;

$$(Л_k)_y = (Л_0)_y + x_k B_z - z_k B_x \quad . \quad . \quad . \quad (68;\ 2)$$

$$(Л_k)_z = (Л_0)_z + y_k B_x - x_k B_y \quad . \quad . \quad . \quad (68;\ 3)$$

Эти формулы вполнѣ сходны съ выраженіями (8) § 4-го проэкцій на неподвижныя оси скорости точки K:

$$\left.\begin{aligned} x_k' &= x_ю' + (z_k - z_ю) Q - (y_k - y_ю) R, \\ y_k' &= y_ю' + (x_k - x_ю) R - (z_k - z_ю) P, \\ z_k' &= z_ю' + (y_k - y_ю) P - (x_k - x_ю) Q. \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Если замѣнить здѣсь, въ формулахъ (8), точку $Ю$—началомъ координатъ, угловую скорость Ω — главнымъ векторомъ B, скорость точки $Ю$ — главнымъ моментомъ $Л_0$ вокругъ начала координатъ и скорость точки K — главнымъ моментомъ $Л_k$ вокругъ этой точки, то получимъ формулы (68).

Поэтому векторы, изображающіе главные моменты совокупности силъ вокругъ разныхъ точекъ тѣла должны обладать тѣми же самыми свойствами, какими обладаютъ скорости точекъ твердаго тѣла;

Мы же знаемъ *), что такія скорости обладаютъ слѣдующими свойствами:

1) Проэкціи на направленіе мгновенной оси скоростей всѣхъ точекъ твердаго тѣла равны между собою и равны проэкціи на то же направленіе скорости полюса $Ю$. Эта проэкція можетъ быть положительною или отрицательною и можетъ быть равна нулю.

*) Основы механики, Домогарова. Кинематика, Гл. II, §§ 7 и 8.

2) Скорости всѣхъ точекъ твердаго тѣла расположены извѣстнымъ правильнымъ образомъ вокругъ винтовой оси, параллельной мгновенной оси. Одна изъ точекъ этой винтовой оси можетъ быть найдена слѣдующимъ образомъ. Надо возстановить изъ точки $Ю$ направленіе перпендикулярное къ скорости точки $Ю$ и къ угловой скорости и провести это направленіе въ такую сторону, чтобы, стоя ногами въ $Ю$, головою по этому направленію и смотря на оконечность длины, изображающей угловую скорость, мы видѣли бы направленіе скорости точки $Ю$ по правую сторону. На этомъ направленіи надо отложить длину равную

$$\frac{w_{ю} \sin (w_{ю}\, \Omega)}{\Omega};$$

оконечность этой длины и будетъ одна изъ точекъ винтовой оси.

Скорости точекъ винтовой оси направлены по ней и равны $w_{ю} \cos (w_{ю}\, \Omega)$. Если эта величина равна нулю, то винтовая ось есть ось мгновенныхъ центровъ, скорости которыхъ равны нулю.

Аналогично этому главные моменты совокупности силъ вокругъ разныхъ точекъ обладаютъ такими свойствами:

Проэкціи моментовъ $Л_k$ на направленіе главнаго вектора для всѣхъ точекъ K одинаковы и равны $Л_0 \cos (Л_0 B)$; въ самомъ дѣлѣ, умноживъ равенства (68), первое на B_x, второе на B_y, третье на B_z и сложивъ, получимъ:

$$B_x (Л_к)_x + B_y (Л_k)_y + B_z (Л_k)_z =$$
$$= B_x (Л_0)_x + B_y (Л_0)_y + B_z (Л_0)_z,$$

откуда слѣдуетъ:

$$Л_k \cos (Л_k B) = Л_0 \cos (Л_0 B).$$

2) Главные моменты расположены правильнымъ винтовымъ образомъ вокругъ такъ называемой *центральной* оси совокупности силъ. Эта центральная ось параллельна главному вектору B; одна изъ точекъ ея можетъ быть найдена слѣдующимъ образомъ. Изъ начала координатъ надо возстановить перпендикуляръ къ направленію главнаго момента $Л_0$ и къ направленію главнаго вектора B и притомъ возстановить въ такомъ направленіи, чтобы, стоя ногами въ началѣ координатъ, головою по этому направленію и глядя на оконечность вектора B, мы бы видѣли направленіе $Л_0$ идущимъ въ правую сто-

рону. На этомъ направленіи надо отложить длину

$$\frac{Л_0 \sin (Л_0 B)}{B}.$$

Оконечность этой длины будетъ одною изъ точекъ центральной оси.

Главные моменты вокругъ точекъ этой оси направлены по ней и равны $Л_0 \cos (Л_0 B)$. Если эта величина равна нулю, то главные моменты вокругъ точекъ центральной оси равны нулю.

Здѣсь, въ этомъ параграфѣ, мы разсматриваемъ такую совокупность приложенныхъ къ твердому тѣлу силъ, главный моментъ которой вокругъ начала координатъ перпендикуляренъ къ главному вектору. На основаніи вышесказаннаго можно заключить слѣдующее:

Если $Л_0$ не равенъ нулю, но перпендикуляренъ къ B, то существуетъ безчисленное множество точекъ приложенія силы, уравновѣшивающей данную совокупность приложенныхъ къ твердому тѣлу силъ. Всѣ эти точки находятся на прямой, параллельной главному вектору: точка C пересѣченія этой прямой съ плоскостью перпендикулярною къ ней, проведенною черезъ начало координатъ, находится на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ O къ направленіямъ B и $Л_0$ въ разстояніи $\overline{OC}$ равномъ отношенію

$$\frac{Л_0}{B},$$

причемъ, глядя изъ точки C на плоскость $BOЛ_0$, мы должны видѣть направленіе OB по лѣвую руку, и направленіе $OЛ_0$ по правую руку.

Вокругъ точки C и вокругъ всякой точки вышесказанной прямой, главный моментъ данной совокупности силъ равенъ нулю, а слѣдовательно сила, уравновѣшивающая данную совокупность силъ, должна быть приложена къ одной изъ этихъ точекъ.

§ 34. Совокупность силъ, уравновѣшиваемая парою силъ.

Парою силъ называются двѣ равныя и противоположно-параллельныя силы, приложенныя къ двумъ точкамъ твердаго тѣла. Главный векторъ такой пары силъ равенъ нулю. Изъ формулъ (68; 1, 2, 3) оказывается, что если главный векторъ какой либо совокупности силъ равенъ нулю, то главный моментъ ея вокругъ какой либо точки имѣетъ ту же величину и то же самое направленіе, какія имѣетъ главный моментъ вокругъ начала координатъ; поэтому главный моментъ пары силъ имѣетъ одну и ту же величину и направленіе, не-

зависимо отъ выбора центра, вокругъ котораго берутся моменты. Если взять моменты вокругъ точки приложенія одной изъ силъ пары, то величина и направленіе момента другой силы опредѣлятъ величину и направленіе главнаго момента пары; его называютъ просто *моментомъ пары*.

Величина момента пары силъ равняется произведенію изъ величины одной изъ силъ, образующихъ пару, на величину кратчайшаго разстоянія между прямыми, по которымъ направлены силы; это разстояніе называется *плечомъ пары*.

Плоскость, заключающая обѣ силы, называется *плоскостью пары*; прямая, проведенная черезъ середину разстоянія между точками приложенія силъ перпендикулярно къ плоскости пары, называется *осью пары*; если изъ той же точки провести линейный моментъ пары, то съ конца этой длины обѣ силы будутъ казаться дѣйствующими слѣва на право.

Совокупность приложенныхъ къ твердому тѣлу силъ, главный векторъ которыхъ равенъ нулю, можетъ быть уравновѣшена парою силъ, моментъ которой равенъ и противоположенъ главному моменту данной совокупности силъ. Этимъ опредѣляется *направленіе* оси пары, то есть направленіе нормали къ плоскости пары; положеніе же этой плоскости въ тѣлѣ, положенія точекъ приложенія силъ, направленія силъ, величинъ ихъ и величина плеча остаются произвольными, но произведеніе изъ величины силы на величину плеча пары должно быть равно величинѣ даннаго главнаго момента.

§ 35. Совокупность параллельныхъ силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу.

Пусть къ точкамъ твердаго тѣла M_1, M_2, ... M_i, ... M_n приложены силы P_1, P_2, ... P_i, ... P_n, направленія которыхъ параллельны между собою, такъ что нѣкоторыя изъ нихъ параллельны направленію, составляющему съ осями координатъ углы, косинусы которыхъ суть λ, μ, ν, другія же имѣютъ направленія противоположныя.

Проэкціи на оси координатъ главнаго вектора этихъ силъ выразятся суммами:

$$B_x = \lambda \sum \pm P_i, \quad B_y = \mu \sum \pm P_i, \quad B_z = \nu \sum \pm P_i,$$

гдѣ знакъ плюсъ должно взять передъ величинами силъ, имѣющихъ

направленіе, опредѣляемое косинусами λ, μ, ν, а знакъ минусъ передъ величинами силъ, имѣющихъ направленіе противоположное.

Проэкціи главнаго момента совокупности этихъ силъ будутъ:

$$(\Lambda_0)_x = \nu \sum \pm P_i y_i - \mu \sum \pm P_i z_i,$$

$$(\Lambda_0)_y = \lambda \sum \pm P_i z_i - \nu \sum \pm P_i x_i,$$

$$(\Lambda_0)_z = \mu \sum \pm P_i x_i - \lambda \sum \pm P_i y_i.$$

Величина главнаго вектора силъ есть $\sum \pm P_i$. Если онъ не равенъ нулю, то, какъ нетрудно убѣдиться, главный моментъ (Λ_0) перпендикуляренъ къ нему. Въ такомъ случаѣ совокупность параллельныхъ силъ можетъ быть уравновѣшена одною силою, противоположною главному вектору и приложенною къ какой либо точкѣ центральной оси. Одна изъ точекъ этой оси (параллельной направленію силъ), имѣющая координаты x_c, y_c, z_c, выражаемыя отношеніями:

$$x_c = \frac{\sum \pm P_i x_i}{\sum \pm P_i}, \quad y_c = \frac{\sum \pm P_i y_i}{\sum \pm P_i}, \quad z_c = \frac{\sum \pm P_i z_i}{\sum \pm P_i}$$

и вокругъ которой главный моментъ равенъ нулю, называется *центромъ параллельныхъ силъ*.

Координаты этого центра не зависятъ отъ косинусовъ λ, μ, ν; поэтому, если всѣ силы, не измѣняя своихъ величинъ и точекъ приложенія и оставаясь параллельными между собою, измѣнятъ свои направленія на какой либо уголъ, то положеніе центра этихъ силъ не измѣнится.

Примѣнивъ предыдущія формулы къ двумъ параллельнымъ силамъ одинаковаго направленія или противоположныхъ направленій, найдемъ извѣстныя въ элементарной механикѣ правила для такъ называемаго сложенія или разложенія двухъ параллельныхъ силъ.

Если сумма $\sum \pm P_i$, то есть главный векторъ совокупности параллельныхъ силъ, равенъ нулю, то эту совокупность можно уравновѣсить парою силъ, моментъ которой равенъ и противоположенъ Λ_0.

§ 36. Совокупность силъ, уравновѣшиваемая силою и парою силъ или двумя силами.

Если совокупность силъ, приложенныхъ къ твердому тѣлу, не удовлетворяетъ условію (67), то она не можетъ быть уравновѣшена одною силою, а если притомъ главный векторъ не равенъ нулю, то она не можетъ быть уравновѣшена и парою силъ.

Такая совокупность силъ можетъ быть уравновѣшена одною силою и одною парою силъ слѣдующимъ образомъ. Сила P, равная и противоположная главному вектору B, можетъ быть приложена къ началу координатъ, плоскость пары силъ должна быть перпендикулярна къ главному моменту $Л_0$ и моментъ ея долженъ быть равенъ и противоположенъ $Л_0$.

Одну изъ силъ F этой пары можно приложить къ началу координатъ и замѣнить эту силу и силу P одною силою Q, равною діагонали параллелограмма на нихъ построеннаго. Послѣ этого совокупность силъ окажется уравновѣшенною двумя силами: силою Q, приложенною къ началу координатъ и другою силою F пары, приложенною въ надлежащей точкѣ твердаго тѣла.

Если $Л_0 \cos(Л_0 B)$ не равно нулю, то, по сказанному въ § 33-мъ, можно заключить, что существуетъ безчисленное множество точекъ, вокругъ которыхъ главный моментъ совокупности силъ равенъ и параллеленъ проэкціи главнаго момента $Л_0$ на направленіе главнаго вектора. Всѣ эти точки находятся на прямой линіи, параллельной главному вектору, называемой *центральною осью данной совокупности силъ*. Точка $Ц$ пересѣченія центральной оси съ проведенною черезъ начало координатъ плоскостью, перпендикулярною къ направленію главнаго вектора B, находится на перпендикулярѣ, возстановленномъ изъ O перпендикулярно къ B и $Л_0$ въ такомъ разстояніи $\overline{OЦ}$ отъ O, которое равняется отношенію:

$$\frac{Л_0 \sin(Л_0 B)}{B};$$

притомъ перпендикуляръ $OЦ$ долженъ быть проведенъ въ такую сторону, чтобы стоящему ногами въ O, головою по направленію $\overline{OЦ}$ и смотрящему на какую либо точку направленія $\overline{OB}$, направленіе $Л_0$ было видно слѣва направо.

Если $Л_0 \cos(Л_0 B) > 0$, то центральный главный моментъ направленъ параллельно B, если же $Л_0 \cos(Л_0 B) < 0$, то онъ направленъ

противоположно B_0. Такую же величину и такое же направленіе имѣетъ главный моментъ вокругъ всякой точки центральной оси.

Имѣя это въ виду, можно заключить, что данную совокупность силъ можно уравновѣсить силою P, равною и противоположною главному вектору силъ, приложенною къ какой либо точкѣ центральной оси, и парою силъ, плоскость которой перпендикулярна къ центральной оси, а моментъ равенъ и прямопротивоположенъ $M_ц$.

Эту силу P и эту пару силъ можно замѣнить двумя силами слѣдующимъ образомъ.

Черезъ точку K приложенія силы P проведемъ прямую, перпендикулярную къ направленію силы, и на этой прямой возьмемъ двѣ произвольныя точки A_1 и A_2. Силу P разложимъ на двѣ параллельныя ей силы P_1 и P_2, приложенныя въ этихъ точкахъ.

Силамъ пары дадимъ величины:

$$F_1 = F_2 = \frac{M_ц}{h},$$

гдѣ h есть величина разстоянія $\overline{A_1A_2}$, и приложимъ ихъ, одну F_1 къ точкѣ A_1, другую къ точкѣ A_2, такъ, чтобы онѣ были противоположны, перпендикулярны къ прямой A_1A_2 и къ направленію силъ P_1 и P_2. Теперь къ точкѣ A_1 будутъ приложены двѣ взаимно-перпендикулярныя силы P_1 и F_1; плоскость, черезъ нихъ проведенная, будетъ перпендикулярна къ прямой A_1A_2 и параллельна направленію P. Мы замѣнимъ ихъ одною силою Q_1 — діагональю прямоугольника, построеннаго на P_1 и F_1. Къ точкѣ A_2 также приложены двѣ силы P_2 и F_2; мы замѣнимъ ихъ силою Q_2, діагональю построеннаго на нихъ прямоугольника, плоскость котораго также перпендикулярна къ прямой A_2A_1 и параллельна P. Очевидно, силы Q_1 и Q_2, уравновѣшивающія совокупность приложенныхъ къ твердому тѣлу силъ, имѣютъ направленія не пересѣкающіяся, перпендикулярныя къ кратчайшему между ними разстоянію A_1A_2.

Такъ какъ выборъ точекъ A_1 и A_2 произволенъ, то величины и направленія силъ Q_1 и Q_2, а также положенія точекъ приложенія ихъ въ тѣлѣ могутъ быть разнообразны до безконечности.

§ 37. Дѣйствіе мгновенныхъ силъ на свободное твердое тѣло.

Чтобы опредѣлить дѣйствіе мгновенныхъ силъ на твердое тѣло, свободное или несвободное, надо составить дифференціальныя уравненія движенія тѣла, включивъ въ число задаваемыхъ силъ силы

мгновенныя; затѣмъ надо помножить эти уравненія на dt и взять интегралы отъ обѣихъ частей равенствъ за время дѣйствія мгновенныхъ силъ. Въ полученныхъ такимъ образомъ равенствахъ надо пренебречь импульсами всякихъ немгновенныхъ (конечныхъ) силъ и принять въ разсчетъ, что, за ничтожно-малое время дѣйствія мгновенныхъ силъ, положеніе тѣла не успѣетъ измѣниться, т. е. x_0, y_0, z_0, φ, ψ и ϑ въ это время остаются неизмѣнными.

При опредѣленіи дѣйствія мгновенныхъ силъ на свободное твердое тѣло мы предположимъ, что на время дѣйствія этихъ силъ начало координатъ помѣщено въ центрѣ инерціи тѣла и что за оси X-овъ, Y-овъ и Z-овъ взяты главныя оси инерціи тѣла.

Положимъ, что къ свободному твердому тѣлу приложены мгновенныя силы, дѣйствующія въ теченіи ничтожно малаго промежутка времени отъ момента t_0 до момента $t_0 + \vartheta$; пусть

$$\begin{aligned} &\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2, \ldots\ldots\ldots \mathfrak{X}_n, \\ &\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \ldots\ldots\ldots \mathfrak{Y}_n, \\ &\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots\ldots\ldots \mathfrak{Z}_n \end{aligned}$$

суть проэкціи на оси координатъ импульсовъ этихъ силъ, а

$$\begin{aligned} &a_1, a_2 \ldots\ldots a_n, \\ &b_1, b_2 \ldots\ldots b_n, \\ &c_1, c_2 \ldots\ldots c_n, \end{aligned}$$

координаты точекъ ихъ приложенія.

Замѣнимъ въ дифференціальныхъ уравненіяхъ движенія величины X_i, Y_i, Z_i проэкціями мгновенныхъ силъ и, помноживъ эти уравненія на dt, возьмемъ отъ нихъ квадратуры за время дѣйствія мгновенныхъ силъ; означимъ черезъ x'_{0c}, y'_{0c}, z'_{0c} проэкціи на оси координатъ скорости центра инерціи въ моментъ начала дѣйствія мгновенныхъ силъ, а черезъ x_c', y_c', z_c'—проэкціи скорости той же точки въ моментъ окончанія дѣйствія мгновенныхъ силъ; изъ уравненій центра инерціи получимъ слѣдующія равенства, выражающія измѣненіе скорости центра инерціи вслѣдствіе приложенныхъ импульсовъ мгновенныхъ силъ:

$$M(x_c' - x_{0c}') = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{X}_i; \quad M(y_c' - y_{0c}') = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Y}_i,$$

$$M(z_c' - z_{0c}') = \sum_{i=1}^{i=n} \mathfrak{Z}_i \ldots\ldots \quad (69)$$

Помноживъ на dt обѣ части дифференціальныхъ уравненій (17) § 6 моментовъ количествъ движенія вокругъ центра инерціи, взявъ квадратуры за время дѣйствія мгновенныхъ силъ, получимъ, имѣя въ виду что за оси CX, CY, CZ взяты главныя оси инерціи:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A}_c\,(p-p_0) &= \sum_{i=1}^{i=n}(b_i\mathfrak{Z}_i - c_i\mathfrak{Y}_i) \\ \mathfrak{B}_c\,(q-q_0) &= \sum_{i=1}^{i=n}(c_i\mathfrak{X}_i - a_i\mathfrak{Z}_i) \\ \mathfrak{C}_c\,(r-r_0) &= \sum_{i=1}^{i=n} a_i\mathfrak{Y}_i - b_i\mathfrak{X}_i), \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

гдѣ p_0, q_0, r_0 суть проэкціи на главныя оси инерціи угловой скорости въ моментъ t_0 начала дѣйствія мгновенныхъ силъ, а p, q, r проэкціи въ моментъ $(t_0+\vartheta)$ окончанія дѣйствія этихъ силъ; ai, b_i, c_i — координаты точки приложенія импульса.

Изъ формулъ (69) слѣдуетъ, что *скорость, сообщаемая центру инерціи свободнаго твердаго тѣла мгновенными силами, имѣетъ направленіе главнаго вектора импульсовъ и равна величинѣ главнаго вектора, дѣленной на массу тѣла*, такъ что дѣйствіе мгновенныхъ силъ на центръ инерціи тѣла не зависитъ отъ того, къ какимъ точкамъ тѣла приложены эти силы, а только отъ величинъ и направленій ихъ импульсовъ.

Изъ формулъ же (70) видно, что направленіе угловой скорости, пріобрѣтаемой свободнымъ тѣломъ, вообще говоря, не параллельно направленію главнаго момента импульсовъ вокругъ центра инерціи.

Обратимъ особенное вниманіе на тотъ случай, когда къ твердому тѣлу приложена одна мгновенная сила въ плоскости XY, проведенной черезъ двѣ центральныя главныя оси инерціи, и если притомъ начальная скорость центра инерціи была перпендикулярна къ оси Z-овъ, а начальная угловая скорость параллельна этой оси. Тогда третья изъ формулъ (69) и первыя двѣ изъ (70) покажутъ, что и послѣ дѣйствія мгновенной силы скорость центра инерціи будетъ перпендикулярна къ оси Z-овъ, а угловая скорость параллельна послѣдней, остальныя же три формулы дадутъ:

$$x_c' - x_{0c}' = \frac{\mathfrak{x}}{M}, \quad y_c' - y_{0c}' = \frac{\mathfrak{y}}{M}$$

$$R = R_0 + \frac{a\mathfrak{y} - b\mathfrak{x}}{\mathfrak{C}_c}.$$

Если твердое тѣло до дѣйствія на него мгновенной силы было въ покоѣ, то эта мгновенная сила произведетъ слѣдующее дѣйствіе:

1) Центру инерціи она сообщитъ такую скорость, какъ будто бы она была приложена къ этой точкѣ; направленіе этой скорости совпадаетъ съ направленіемъ импульса, а величина скорости равняется величинѣ импульса, дѣленной на массу тѣла.

2) Всему тѣлу она сообщитъ угловую скорость вокругъ оси Z-овъ, равную моменту импульса вокругъ оси Z-овъ, дѣленному на моментъ инерціи тѣла вокругъ этой оси.

Считаемъ нужнымъ обратить вниманіе на то обстоятельство, что *мгновенная сила, перпендикулярная къ одной изъ главныхъ центральныхъ осей инерціи тѣла* (оси Z-овъ), *сообщаетъ ему угловую скорость параллельную этой оси только въ томъ случаѣ, если сила приложена къ точкѣ, находящейся въ плоскости двухъ другихъ главныхъ центральныхъ осей инерціи тѣла;* еслибы c не было равно нулю, то p и q не были бы равны нулю.

§ 38. Дѣйствіе мгновенной силы на твердое тѣло, имѣющее постоянную неподвижную ось, вокругъ которой оно можетъ вращаться. Центръ удара.

Предположимъ, что въ какой либо точкѣ покоющагося твердаго тѣла, свобода котораго ограничена такъ, какъ объяснено въ § 14, приложена мгновенная сила; требуется опредѣлить дѣйствіе этой силы на тѣло и ударъ на связи.

Пусть $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ суть проэкціи импульса на оси координатъ и a, b, c—координаты точки приложенія импульса; предположимъ, что ось X-овъ проведена перпендикулярно къ направленію импульса, такъ что $\mathfrak{x} = 0$. Уголъ ϑ положимъ равнымъ нулю.

Взявъ квадратуры отъ обѣихъ частей дифференціальныхъ уравненій (39) § 14 по t за время дѣйствія мгновенной силы, получимъ слѣдующія уравненія:

$$M\alpha_c = \mu_1 + \mu_3, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (71;\ 1)$$

$$M\beta_c = \mathfrak{y} + \mu_2 + \mu_4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (71;\ 2)$$

$$0 = \mathfrak{Z} + \mu_5, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (71;\ 3)$$

$$л_x = -E_0\varepsilon' = b\mathfrak{Z} - c\mathfrak{Y} + k(\mu_4 - \mu_2) \quad (71;\ 4)$$

$$л_y = -D_0\varepsilon' = -a\mathfrak{Z} + k(\mu_1 - \mu_3) \quad (71;\ 5)$$

$$л_z = C_0\varepsilon' = a\mathfrak{Y}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (71;\ 6)$$

гдѣ μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 суть импульсы реакцій связей.

Послѣднее изъ этихъ равенствъ опредѣлитъ величину угловой скорости ε' вокругъ оси Z-овъ, получаемой тѣломъ вслѣдствіе дѣйствія мгновенной силы; проэкціи α_c β_c скорости центра инерціи тѣла выразятся такъ:

$$\alpha_c = -y_c\varepsilon', \quad \beta_c = x_c\varepsilon'.$$

Опредѣлимъ условія, при которыхъ точки опоры оси вращенія тѣла не испытываютъ удара при дѣйствіи мгновенной силы, т. е. условія, при которыхъ μ_1, μ_2, μ_3, μ_4, μ_5 равны нулю.

Изъ уравненія (71, 3) слѣдуетъ, что μ_5 будетъ равно нулю, если $\mathfrak{Z} = 0$, т. е., если импульсъ будетъ перпендикуляренъ къ оси Z-овъ.

Если $\mathfrak{Z} = 0$, то изъ уравненія (71, 5) окажется, что $(\mu_1 - \mu_3)$ будетъ равно пулю при томъ условіи, чтобы D_0 было равно нулю.

Изъ уравненія же (71, 1) окажется, что $(\mu_1 + \mu_3)$ будетъ равно пулю при условіи, чтобы y_c было равно нулю, т. е., центръ инерціи тѣла долженъ заключаться въ плоскости XZ, или, иначе говоря, импульсъ долженъ быть перпендикуляренъ не только къ оси Z-овъ, но и къ плоскости, проведенной черезъ эту ось и черезъ центръ инерціи тѣла.

Для того, чтобы μ_1 и μ_2 были равны нулю, надо, чтобы были удовлетворены слѣдующія равенства:

$$Mx_c\varepsilon' = \mathfrak{Y}, \quad c\mathfrak{Y} = E_0\varepsilon',$$

т. е.

$$\mathfrak{Y}\left(Mx_c\frac{a}{C_0} - 1\right) = 0, \quad \mathfrak{Y}\left(c - E_0\frac{a}{C_0}\right) = 0.$$

Первое изъ этихъ равенствъ опредѣляетъ координату a точки приложенія мгновенной силы: изъ него слѣдуетъ:

$$a = \frac{C_0}{Mx_c} = x_c + \frac{C_c}{Mx_c},$$

т. е. мгновенная сила должна быть приложена къ одной изъ точекъ оси качаній тѣла вокругъ оси Z-овъ.

Второе изъ предыдущихъ равенствъ опредѣляетъ координату c; изъ него и изъ только что полученнаго выраженія для a слѣдуетъ:

$$cMx_c - E_0 = 0,$$

что можно написать такъ:

$$c\sum mx - \sum mzx = 0, \sum m(z-c)x = 0.$$

Проведемъ черезъ точку приложенія мгновенной силы плоскость перпендикулярную къ оси Z, пусть точка K есть точка пересѣченія этой плоскости съ осью Z-овъ; условія:

$$D_0 - cMy_c = 0, \quad E_0 - cMx_c = 0,$$

то есть:

$$\sum m(z-c)y = 0, \sum m(z-c)x = 0,$$

выражаютъ, что ось Z-овъ должна быть одною изъ главныхъ осей эллипсоида инерціи точки K.

Сопоставляя всѣ найденныя условія, можемъ сказать, что *для того, чтобы мгновенная сила не сообщила твердому тѣлу удара о точки опоры его неподвижной оси вращенія, необходимо:*

1) *чтобы направленіе мгновенной силы было перпендикулярно къ плоскости, проведенной черезъ ось вращенія и черезъ центръ инерціи тѣла,*

2) *чтобы направленіе мгновенной силы заключалось въ плоскости, перпендикулярной къ оси Z-овъ и проходящей черезъ такую точку K этой оси, для которой ось эта была бы главною осью инерціи*

3) *и чтобы кратчайшее разстояніе направленія мгновенной силы отъ оси Z-овъ равнялось бы разстоянію оси качаній твердаго тѣла вокругъ оси Z-овъ отъ этой оси.*

Точка пересѣченія направленія мгновенной силы, удовлетворяющей этимъ условіямъ, съ осью качаній называется *центромъ удара*, соотвѣтствующимъ выбранной оси вращенія.

145T 53 G05 BR 1298

dago tiela,
University Libraries
043 178 347

STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
CECIL H. GREEN LIBRARY
STANFORD, CALIFORNIA 94305-6004
(415) 723-1493

All books may be recalled after 7 days

DATE DUE